

УДК 531.36

© 2005 г. О. Н. Кириллов, А. П. Сейранян

### ВЛИЯНИЕ МАЛОГО ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ТРЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Исследуется влияние малого внутреннего и внешнего трения на устойчивость распределенных неконсервативных систем. Построена теория, качественно и количественно описывающая “парадокс дестабилизации” в этих системах, одно из проявлений которого – скачкообразное падение критических нагрузки и частоты при учете малых диссипативных сил. Эта теория основывается на анализе бифуркаций кратных собственных значений (СЗ) несамосопряженных дифференциальных операторов, зависящих от параметров. Получены явные формулы, описывающие распад кратных СЗ с цепочками Келдыша произвольной длины для линейных дифференциальных операторов, аналитически зависящих от комплексного спектрального параметра и являющихся гладкими функциями вектора действительных параметров. Показано, что “парадокс дестабилизации” связан с возмущением малым трением двукратного СЗ циркуляционной системы с цепочкой Келдыша длины 2, отвечающего за образование особенности на границе области устойчивости. Выведены формулы, описывающие поведение СЗ неконсервативной системы при изменении параметров нагрузки и диссипации. Найдены явные выражения для скачков критических нагрузки и частоты потери устойчивости. В аналитическом виде получены аппроксимации области асимптотической устойчивости в пространстве параметров системы. Выявлен *эффект стабилизации* распределенной циркуляционной системы малыми диссипативными силами, состоящий в увеличении критической нагрузки, и выведены условия стабилизации. В качестве механического примера исследована устойчивость вязкоупругого стержня с малым внешним и внутренним трением; в отличие от предшествующих работ показано, что граница области устойчивости имеет особенность “зонтик Уитни”. В аналитическом виде получена зависимость критической нагрузки от параметров внешнего и внутреннего трения, дающая явное выражение для скачка критической нагрузки. На основе аналитических соотношений построены области стабилизации и дестабилизации в пространстве параметров задачи. Показано, что аналитические формулы хорошо согласуются с численными результатами предшествующих работ.

**1. Введение.** Циглер [1], исследуя устойчивость двузвенного маятника, нагруженного следящей силой, пришел к неожиданному выводу, что критическая сила потери устойчивости неконсервативной системы с исчезающе малой диссипацией существенно ниже, чем в случае, когда диссипация в системе с самого начала предполагается отсутствующей. Это явление, получившее название *парадокс дестабилизации*, было затем обнаружено во многих неконсервативных механических системах, как в дискретных, так и в распределенных [2–20]. Несмотря на большое число публикаций, вопросы, порожденные парадоксом дестабилизации, до сих пор не получили своего разрешения в

общем виде, хотя, по мнению В.В. Болотина [2], именно они представляют наибольший теоретический интерес в неконсервативных задачах устойчивости.

В качестве иллюстрации парадокса дестабилизации рассмотрим поперечные колебания консольного стержня из вязкоупругого материала Кельвина – Фойхта, нагруженного на свободном конце тангенциальной следящей силой  $q$  [2, 7]. В безразмерных переменных уравнение малых колебаний стержня и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1, t) + \eta \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t}(1, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(1, t) + \eta \frac{\partial^4 y}{\partial x^3 \partial t}(1, t) = 0 \quad (1.2)$$

Коэффициент внутреннего трения  $\eta$  характеризует вязкоупругие свойства материала, а коэффициент внешнего трения  $\mu$  отвечает за сопротивление среды.

Отыскивая решение в виде  $y(x, t) = u(x) \exp \lambda t$ , приходим к задаче на собственные значения

$$(1 + \eta \lambda) u''''_{xxxx} + q u''_{xx} + (\lambda^2 + \mu \lambda) u = 0 \quad (1.3)$$

$$u(0) = u'_x(0) = 0, \quad u''_{xx}(1) = u'''_{xxx}(1) = 0 \quad (1.4)$$

где  $\lambda$  – собственное значение (СЗ),  $u(x)$  – собственная функция (СФ), а штрихом обозначено дифференцирование по нижним индексам, в данном случае по переменной  $x \in [0, 1]$ .

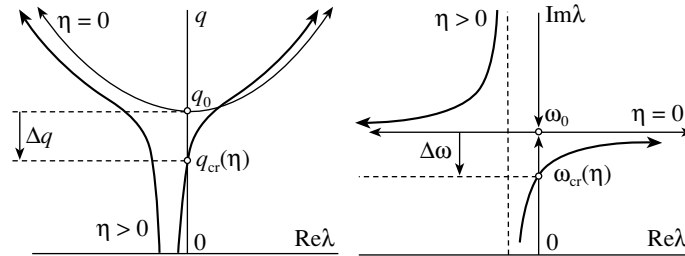
Система, описываемая уравнениями (1.1), (1.2), асимптотически устойчива, если все СЗ  $\lambda$  задачи (1.3), (1.4) имеют отрицательные действительные части, и неустойчива, если хотя бы одно СЗ находится в правой части комплексной плоскости ( $\text{Re} \lambda > 0$ ). Критическая нагрузка  $q_{cr}(\eta, \mu)$ , характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких СЗ ( $\text{Re} \lambda = 0$ ).

Если положить в соотношениях (1.1)–(1.4) параметры трения равными нулю, то полученная система станет *циркуляционной* [2, 5]. Циркуляционная система устойчива (не асимптотически), если все ее СЗ чисто мнимые и полупростые, т.е. алгебраическая кратность СЗ совпадает с числом его СФ. При изменении параметра нагрузки  $q$  СЗ двигаются по мнимой оси и при некотором  $q = q_0$  два из них сливаются в одно двукратное  $i\omega_0$ , которое затем распадается на пару комплексно сопряженных СЗ [2, 22]. Двукратному СЗ  $i\omega_0$  соответствует цепочка Келдыша длины 2, состоящая из собственной функции  $u_0$  и присоединенной функции  $u_1$ , удовлетворяющих уравнениям с граничными условиями [7]

$$u''''_{0xxxx} + q_0 u''_{0xx} - \omega_0^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = u'_{0x}(0) = 0, \quad u''_{0xx}(1) = u'''_{0xxx}(1) = 0 \quad (1.5)$$

$$u''''_{1xxxx} + q_0 u''_{1xx} - \omega_0^2 u_1 = -2i\omega_0 u_0, \quad u_1(0) = u'_{1x}(0) = 0, \quad u''_{1xx}(1) = u'''_{1xxx}(1) = 0 \quad (1.6)$$

Это означает, что при  $q = q_0$  алгебраически двукратному СЗ соответствует лишь одна СФ, что выражается в появлении секулярного члена вида  $(u_1(x) + t u_0(x)) e^{i\omega_0 t}$  в общем решении краевой задачи (1.1), (1.2). Цепочка Келдыша обобщает известное понятие цепочки Жордана в линейной алгебре [23–30]. Таким образом, наличие в спектре невозмущенной задачи двукратного СЗ  $i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$  с цепочкой Келдыша длины 2 при условии, что все остальные СЗ чисто мнимые и простые, отвечает границе между областями устойчивости и флаттера (колебательной неустойчивости) [31, 32].



Фиг. 1

Известно, что система (1.1), (1.2) без учета трения ( $\eta = 0$ ,  $\mu = 0$ ) устойчива при  $0 \leq q < q_0 = 20.05$  [21], а при учете сколь угодно малого внутреннего трения ( $\eta \rightarrow +0$ ,  $\mu = 0$ ) интервал устойчивости сужается до  $0 \leq q < q_{cr} = 10.94 < q_0$ . Следовательно, в рассматриваемой задаче имеет место парадокс дестабилизации: при учете сколь угодно малого внутреннего трения критическая нагрузка падает скачком. При этом также скачком падает и критическая частота со значения  $\omega_0 = 11.02$  до  $\omega_{cr} = 5.40$  [4, 7]. Эти эффекты показаны на фиг. 1 при  $\mu = 0$ . Внешнее трение ( $\mu > 0$ ) снижает дестабилизирующее влияние внутреннего трения [7]. Заметим, что авторы предыдущих исследований решали частные механические задачи, подобные рассмотренной выше, численными или полуаналитическими методами.

Цель настоящей работы – развитие аналитических методов исследования спектра несамосопряженных краевых задач на СЗ, зависящих от параметров, и их применение к изучению влияния малых диссипативных сил на устойчивость распределенных неконсервативных систем общего вида, включающих задачу (1.1), (1.2) как частный случай.

**2. Бифуркации кратных СЗ с цепочками Келдыша.** Поскольку парадокс дестабилизации оказывается связанным с наличием в спектре невозмущенной циркуляционной системы двукратного СЗ с цепочкой Келдыша, для его изучения прежде всего необходимо знать, как ведут себя кратные СЗ при изменении параметров системы. С этой целью рассмотрим обобщенную несамосопряженную задачу на собственные значения для линейного дифференциального оператора с граничными условиями [27, 30].

Обозначим через  $L$  линейный дифференциальный оператор порядка  $m$  по переменной  $x$ , действие которого на гладкую функцию  $u(x)$  определяется соотношением

$$Lu = \sum_{j=0}^m l_j \frac{d^{m-j} u}{dx^{m-j}} \quad (2.1)$$

Коэффициенты  $l_j(x, \lambda, \mathbf{p})$  оператора  $L$  гладко зависят от переменной  $x$ , причем функция  $l_0(x)$  на отрезке  $x \in [0, 1]$  ограничена снизу положительной постоянной. Кроме того, предполагается, что коэффициенты  $l_j(x, \lambda, \mathbf{p})$  аналитически зависят от комплексного спектрального параметра  $\lambda$  и гладко – от вектора действительных параметров  $\mathbf{p} \in R^n$ .

Назовем матрицей граничных условий матрицу  $\mathbf{U} = \|\mathbf{A}\mathbf{B}\|$  размерности  $m \times 2m$  и ранга  $m$ , состоящую из блоков  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  размерности  $m \times m$  каждый. Определим вектор  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1))$  размерности  $2m$ , где векторы

$$\mathbf{u}(\xi) = (u(\xi), u'_x(\xi), \dots, u_x^{(m-1)}(\xi)), \quad \xi = 0, 1$$

образованы значениями функции  $u(x)$  и ее производных в граничных точках  $x = 0$  и  $x = 1$ . Тогда

$$\mathbf{U}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \quad (2.2)$$

Предполагается, что элементы матриц  $\mathbf{A}(\lambda, \mathbf{p})$  и  $\mathbf{B}(\lambda, \mathbf{p})$  аналитически зависят от комплексного спектрального параметра  $\lambda$  и являются гладкими функциями вектора действительных параметров  $\mathbf{p} \in R^n$ .

На отрезке  $x \in [0, 1]$  рассмотрим задачу на СЗ для дифференциального оператора  $L$  с граничными условиями, определяемыми матрицей  $\mathbf{U}$ ,

$$L(x, \lambda, \mathbf{p})u = 0, \quad \mathbf{U}(\lambda, \mathbf{p})\mathbf{u} = 0 \tag{2.3}$$

Нетривиальное решение краевой задачи (2.3) существует тогда и только тогда, когда характеристический определитель обращается в нуль [26, 27, 30]:

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}\mathbf{Y}(1)) = 0 \tag{2.4}$$

где элементы матрицы  $\mathbf{Y}(x)$  определены соотношениями  $Y_{ij}(x) = y_{j_x}^{(i-1)}(x)$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ ), а  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$  – фундаментальная система решений дифференциального уравнения (2.3). При некотором фиксированном векторе  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$  СЗ  $\lambda_0$ , которому соответствует СФ  $u_0$ , является корнем характеристического уравнения (2.4).

Умножив уравнение (2.3) на функцию  $\bar{v}(x)$ , где черта означает комплексное сопряжение, и проинтегрировав по частям, получим

$$\int_0^1 \bar{v}Ludx = \int_0^1 u\overline{L^*v}dx + \bar{\mathbf{v}}^T(1)\mathbf{L}(1)\mathbf{u}(1) - \bar{\mathbf{v}}^T(0)\mathbf{L}(0)\mathbf{u}(0) \tag{2.5}$$

где [26]

$$L^*v = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}} (l_j(x)\overline{v}) \tag{2.6}$$

а матрицы  $\mathbf{L}(0)$  и  $\mathbf{L}(1)$  – значения в точках  $x = 0$  и  $x = 1$  матрицы  $\mathbf{L}(x)$  размерности  $m \times m$ , элементы которой  $L_{ij}(x)$  выражаются через коэффициенты дифференциального оператора  $l_j$  и их производные по  $x$

$$L_{ij}(x) = \sum_{k=i-j}^{m-j} (-1)^k C_k^{i-1} \frac{d^{k-i+1}}{dx^{k-i+1}} l_{m-j-k}, \quad C_k^{i-1} = \begin{cases} \frac{k!}{(i-1)!(k-i+1)!}, & k \geq i-1 \geq 0 \\ 0, & k < i-1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Векторы

$$\mathbf{b}(\xi) = (v(\xi), v'_x(\xi), \dots, v_x^{(m-1)}(\xi)), \quad \xi = 0, 1$$

образованы значениями функции  $v(x)$  и ее производных в точках  $x = 0$  и  $x = 1$ . Обозначим  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1))$ .

Введем в рассмотрение матрицу  $\tilde{\mathbf{U}} = \|\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}\|$  размерности  $m \times 2m$ , где матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}(\lambda, \mathbf{p})$  и  $\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{p})$  размерности  $m \times m$  могут зависеть, вообще говоря, от спектрального параметра  $\lambda$  и вектора действительных параметров  $\mathbf{p}$ . Выберем матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}$  и  $\tilde{\mathbf{B}}$  так, чтобы блочная матрица размерности  $2m \times 2m$ , составленная из матриц  $\mathbf{U}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}$ , была невырожденной в окрестности точки  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$  и СЗ  $\lambda = \lambda_0$ . Тогда справедливо равенство

$$\left\| \begin{array}{cc} -\mathbf{L}(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{L}(1) \end{array} \right\| = \mathbf{V}^* \tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{V}}^* \mathbf{U} \tag{2.8}$$

где звездочка означает эрмитово сопряжение (в случае матриц это операция транспонирования и комплексного сопряжения),  $\mathbf{O}$  – нулевая матрица размерности  $m \times m$ , а  $\mathbf{V}$  и  $\tilde{\mathbf{V}}$  – матрицы размерности  $m \times 2m$ , определенные соотношением

$$\begin{vmatrix} -\tilde{\mathbf{V}} \\ \mathbf{V} \end{vmatrix}^* = \begin{vmatrix} -\mathbf{L}(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{L}(1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \end{vmatrix}^{-1} \quad (2.9)$$

Дифференцирование уравнения (2.8) по  $\lambda$  дает

$$\begin{vmatrix} -\mathbf{L}'_{\lambda}(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{L}'_{\lambda}(1) \end{vmatrix} = (\mathbf{V}'_{\lambda})^* \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{V}^* \tilde{\mathbf{U}}'_{\lambda} - (\tilde{\mathbf{V}}'_{\lambda})^* \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{V}}^* \mathbf{U}'_{\lambda} \quad (2.10)$$

где штрих означает дифференцирование по спектральному параметру  $\lambda$  или  $\bar{\lambda}$  (черта отвечает комплексному сопряжению).

Учитывая соотношение (2.8) в уравнении (2.5), получим формулу Лагранжа для оператора  $L$  [26]

$$(Lu, v) - (u, L^*v) = (\mathbf{V}\mathbf{v})^* \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{u} - (\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{v})^* \mathbf{U}\mathbf{u} \quad (u, v) = \int_0^1 u(x)\bar{v}(x)dx \quad (2.11)$$

где  $(u, v)$  – эрмитово скалярное произведение функций  $u, v$ .

Если предположить, что матрицы  $\tilde{\mathbf{B}}$  и  $\mathbf{S} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}$  – неособые, то согласно формуле Шура [33]

$$\det \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \end{vmatrix} = \det \tilde{\mathbf{B}} \det(\mathbf{A} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}) \neq 0 \quad (2.12)$$

а матрицы  $\mathbf{V}$  и  $\tilde{\mathbf{V}}$  размерности  $m \times 2m$  выписываются в явном виде

$$\mathbf{V} = \left\| (\mathbf{L}(0)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}^{-1})^* (\mathbf{L}(1)\tilde{\mathbf{B}}^{-1} + \mathbf{L}(1)\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}^{-1})^* \right\| \quad (2.13)$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \left\| (\mathbf{L}(0)\mathbf{S}^{-1})^* (\mathbf{L}(1)\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1})^* \right\| \quad (2.14)$$

Задача на собственные значения для оператора  $L^*$

$$L^*(\bar{\lambda}, \mathbf{p})v = 0, \quad \mathbf{V}(\bar{\lambda}, \mathbf{p})\mathbf{v} = 0 \quad (2.15)$$

будет сопряженной к задаче (2.3), а оператор  $L^*$ , определенный уравнением (2.6), будет сопряженным к оператору  $L$  (2.1). Сопряженные операторы  $L$  и  $L^*$  с соответствующими граничными условиями (вторые равенства (2.3) и (2.15)) связаны соотношением  $(Lu, v) = (u, L^*v)$  [26].

Предположим, что в точке  $\mathbf{p}_0$  и ее окрестности спектр задачи (2.3) дискретен. Обозначим  $L_0 = L(\lambda_0, \mathbf{p}_0)$ ,  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(\lambda_0, \mathbf{p}_0)$  и рассмотрим гладкую кривую в  $n$ -мерном пространстве параметров, зависящую от действительного параметра  $\epsilon \geq 0$

$$\mathbf{p}(\epsilon) = \mathbf{p}_0 + \epsilon\dot{\mathbf{p}} + \frac{\epsilon^2}{2}\ddot{\mathbf{p}} + o(\epsilon^2) \quad (2.16)$$

где точка означает дифференцирование по  $\epsilon$ , а производные вычислены при  $\epsilon = 0$ . В силу этого возмущенный оператор  $L(\lambda, \mathbf{p}(\epsilon))$  можно представить в виде ряда

$$L(\lambda, \mathbf{p}(\epsilon)) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^r}{r!} \left( \frac{\partial^r L}{\partial \lambda^r} + \epsilon \frac{\partial^r L_1}{\partial \lambda^r} + \epsilon^2 \frac{\partial^r L_2}{\partial \lambda^r} + o(\epsilon^2) \right) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^r L_1}{\partial \lambda^r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{r+1} L}{\partial \lambda^r \partial p_j} \dot{p}_j, \quad \frac{\partial^r L_2}{\partial \lambda^r} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{r+1} L}{\partial \lambda^r \partial p_j} \ddot{p}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,t=1}^n \frac{\partial^{r+2} L}{\partial \lambda^r \partial p_j \partial p_t} \dot{p}_j \dot{p}_t \quad (2.18)$$

При  $r = 0$  формулы (2.18) дают выражения для операторов  $L_1, L_2$ . Соответственно, матрица граничных условий  $\mathbf{U}(\lambda, \mathbf{p}(\epsilon))$  принимает вид

$$\mathbf{U}(\lambda, \mathbf{p}(\epsilon)) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^r}{r!} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \lambda^2} + \epsilon \frac{\partial^r \mathbf{U}_1}{\partial \lambda^r} + \epsilon^2 \frac{\partial^r \mathbf{U}_2}{\partial \lambda^r} + o(\epsilon^2) \right) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^r \mathbf{U}_1}{\partial \lambda^r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{r+1} \mathbf{U}}{\partial \lambda^r \partial p_j} \dot{p}_j, \quad \frac{\partial^r \mathbf{U}_2}{\partial \lambda^r} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{r+1} \mathbf{U}}{\partial \lambda^r \partial p_j} \ddot{p}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,t=1}^n \frac{\partial^{r+2} \mathbf{U}}{\partial \lambda^r \partial p_j \partial p_t} \dot{p}_j \dot{p}_t \quad (2.20)$$

где частные производные вычислены при  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \lambda = \lambda_0$ . При  $r = 0$  формулы (2.20) дают выражения для матриц  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ .

*Простое собственное значение  $\lambda_0$ .* Предположим теперь, что СЗ  $\lambda_0$  в точке  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$  является простым корнем уравнения (2.4) с СФ  $u_0$ . Собственная функция  $u_0$  удовлетворяет уравнению с граничными условиями

$$L_0 u_0 = 0, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{u}_0 = 0 \quad (2.21)$$

а СФ  $v_0$  комплексно-сопряженного СЗ  $\bar{\lambda}_0$  сопряженного оператора является решением задачи на собственные значения

$$L_0^* v_0 = 0, \quad \mathbf{V}_0 \mathbf{v}_0 = 0 \quad (2.22)$$

Тогда возмущенное СЗ  $\lambda(\epsilon)$  и СФ  $u(\epsilon)$  представляются в виде рядов по  $\epsilon$  [34]

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon + \lambda_2 \epsilon^2 + \dots, \quad u = u_0 + w_1 \epsilon + w_2 \epsilon^2 + \dots \quad (2.23)$$

Обозначим

$$\mathbf{w}_j = (\mathbf{w}_j(0), \mathbf{w}_j(1)), \quad \mathbf{w}_j(\xi) = (w_j(\xi), w'_{j_x}(\xi), \dots, w_{j_x}^{(m-1)}(\xi)), \quad \xi = 0, 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

Подставляя разложения (2.17)–(2.20) и (2.23) в уравнения (2.3) и собирая коэффициенты при  $\epsilon$ , найдем уравнения и граничные условия, которым должна удовлетворять функция  $w_1$  во втором разложении (2.23),

$$L_0 w_1 = -L_1 u_0 - \lambda_1 L'_\lambda u_0, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{w}_1 = -\mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0 - \lambda_1 \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0 \quad (2.24)$$

Умножая скалярно обе части уравнения (2.24) на функцию  $v_0$  и учитывая формулу Лагранжа (2.11), которая при помощи уравнения и граничных условий (2.22) записывается в виде

$$(L_0 w_1, v_0) = \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0 \quad (2.25)$$

найдем коэффициент  $\lambda_1$  в первом разложении (2.23)

$$\lambda_1 = -\frac{(L_1 u_0, v_0) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0}{(L'_\lambda u_0, v_0) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0} \quad (2.26)$$

Двукратное собственное значение  $\lambda_0$ : регулярный случай. Рассмотрим теперь случай двукратного СЗ  $\lambda_0$  с цепочкой Келдыша длины 2, состоящей из собственной функции  $u_0$  и присоединенной функции  $u_1$ , удовлетворяющих уравнениям с граничными условиями [26]

$$L_0 u_0 = 0, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{u}_0 = 0 \quad (2.27)$$

$$L_0 u_1 = -L'_\lambda u_0, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{u}_1 = -\mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0 \quad (2.28)$$

Умножим скалярно уравнение (2.27) на функцию  $v_1$ , а уравнение (2.28) – на функцию  $v_0$ , проинтегрируем получившиеся выражения по частям с использованием формулы (2.5) для операторов  $L_0$ ,  $L'_\lambda$  и затем сложим. В результате приходим к соотношению

$$(u_0, L_0^* v_1 + L_\lambda^{*'} v_0) = (u_1, L_0^* v_0) + \\ + \mathbf{v}_1^* \left\| \begin{array}{cc} -\mathbf{L}(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{L}(1) \end{array} \right\| \left\| \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0^* \right\| \left\| \begin{array}{cc} -\mathbf{L}_0(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{L}_0(1) \end{array} \right\| \left\| \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_0^* \right\| \left\| \begin{array}{cc} -\mathbf{L}'_\lambda(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{L}'_\lambda(1) \end{array} \right\| \left\| \mathbf{u}_0 \right\| = 0 \quad (2.29)$$

С учетом соотношений (2.8), (2.10) преобразуем уравнение (2.29) к виду

$$(u_0, L_0^* v_1 + L_\lambda^{*'} v_0) + (u_1, L_0^* v_0) + (\mathbf{V}_0 \mathbf{v}_1 + \mathbf{V}'_\lambda \mathbf{v}_0)^* \tilde{\mathbf{U}}_0 \mathbf{u}_0 - (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_1 + \tilde{\mathbf{V}}'_\lambda \mathbf{v}_0)^* \mathbf{U}_0 \mathbf{u}_0 + \\ + (\mathbf{V}_0 \mathbf{v}_0)^* (\tilde{\mathbf{U}}_0 \mathbf{u}_1 + \tilde{\mathbf{U}}'_\lambda \mathbf{u}_0) - (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0)^* (\tilde{\mathbf{U}}_0 \mathbf{u}_1 + \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0) = 0 \quad (2.30)$$

Функции  $v_0$  и  $v_1$ , удовлетворяющие уравнениям и граничным условиям

$$L_0^* v_0 = 0, \quad \tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0 = 0 \quad (2.31)$$

$$L_0^* v_1 = -L_\lambda^{*'} v_0, \quad \mathbf{V}_0 \mathbf{v}_1 = -\mathbf{V}'_\lambda \mathbf{v}_0 \quad (2.32)$$

образуют сопряженную цепочку Келдыша двукратного СЗ  $\lambda_0$ . Уравнения сопряженных цепочек (2.27), (2.28) и (2.31), (2.32) имеют одинаковую форму и обращают равенство (2.30) в тождество.

Умножая скалярно уравнение (2.28) на функцию  $v_0$  и используя тождество Лагранжа (2.11), принимающее при учете уравнения и граничных условий (2.28) вид

$$(L_0 u_1, v_0) = \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0 \quad (2.33)$$

получим условие ортогональности

$$(L'_\lambda u_0, v_0) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0 = 0 \quad (2.34)$$

Соотношение (2.34) связывает собственные функции сопряженных задач при наличии двукратного СЗ с цепочкой Келдыша длины 2. Однако оно справедливо и для кратного СЗ с цепочкой Келдыша произвольной длины. Для циркуляционных неконсервативных систем условие ортогональности (2.34) характеризует наступление (границу) флаттера [35, 37].

Возмущенное двукратное СЗ  $\lambda(\epsilon)$  и его СФ  $u(\epsilon)$  выражаются при помощи рядов Ньютона–Пюизо [34]

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon^{1/2} + \lambda_2 \epsilon + \lambda_3 \epsilon^{3/2} + \lambda_4 \epsilon^2 + \dots \quad (2.35)$$

$$u = u_0 + w_1 \epsilon^{1/2} + w_2 \epsilon + w_3 \epsilon^{3/2} + w_4 \epsilon^2 + \dots \quad (2.36)$$

Подставим, как и в предыдущем случае, разложения (2.17)–(2.20) и (2.35), (2.36) в задачу на собственные значения (2.3) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $\epsilon$ . Отсюда найдем, что функции  $w_1, w_2, w_3$  удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$L_0 w_1 = -\lambda_1 L'_\lambda u_0, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{w}_1 = -\lambda_1 \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0 \quad (2.37)$$

$$L_0 w_2 = -\lambda_1 L'_\lambda w_1 - \lambda_2 L'_\lambda u_0 - L_1 u_0 - \frac{\lambda_1^2}{2!} L''_{\lambda\lambda} u_0 \quad (2.38)$$

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{w}_2 = -\lambda_1 \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{w}_1 - \lambda_2 \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0 - \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0 - \frac{\lambda_1^2}{2!} \mathbf{U}''_{\lambda\lambda} \mathbf{u}_0$$

$$L_0 w_3 = -\lambda_1 L'_\lambda w_2 - \left( L_1 + \lambda_2 L'_\lambda + \frac{\lambda_1^2}{2!} L''_{\lambda\lambda} \right) w_1 - \left( \lambda_1 L'_{1\lambda} + \lambda_3 L'_\lambda + \lambda_1 \lambda_2 L''_{\lambda\lambda} + \frac{\lambda_1^3}{3!} L'''_{\lambda\lambda\lambda} \right) u_0 \quad (2.39)$$

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{w}_3 = -\lambda_1 \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{w}_2 - \left( \mathbf{U}_1 + \lambda_2 \mathbf{U}'_\lambda + \frac{\lambda_1^2}{2!} \mathbf{U}''_{\lambda\lambda} \right) \mathbf{w}_1 - \left( \lambda_1 \mathbf{U}'_{1\lambda} + \lambda_3 \mathbf{U}'_\lambda + \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{U}''_{\lambda\lambda} + \frac{\lambda_1^3}{3!} \mathbf{U}'''_{\lambda\lambda\lambda} \right) \mathbf{u}_0$$

Сравнивая уравнения (2.37) и (2.28), найдем, что функция  $w_1$  имеет структуру

$$w_1 = \lambda_1 u_1 + \gamma u_0, \quad (2.40)$$

где  $\gamma$  – произвольный коэффициент. Умножая скалярно уравнение (2.38) на функцию  $u_0$ , подставляя в получившееся произведение выражение для функции  $w_1$  из (2.40) и учитывая уравнения (2.31), (2.32) и тождество Лагранжа (2.11), получим коэффициент  $\lambda_1$  в разложении (2.35)

$$\lambda_1^2 = -\frac{1}{\sigma_2} ((L_1 u_0, v_0) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0), \quad \sigma_2 = \sum_{r=1}^2 \frac{1}{r!} ((L_\lambda^{(r)} u_{2-r}, v_0) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_\lambda^{(r)} \mathbf{u}_{2-r}) \quad (2.41)$$

Чтобы найти следующий коэффициент разложения  $\lambda_2$ , умножим уравнение (2.39) скалярно на функцию  $u_0$  и учтем формулу Лагранжа (2.11). Получим

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{\lambda_1^2}{2} ((L''_{\lambda\lambda} u_0, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_1)^* \mathbf{U}''_{\lambda\lambda} \mathbf{u}_0) + \lambda_1 ((L'_\lambda w_2, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_1)^* \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{w}_2) + \\ & + \gamma ((L_1 u_0, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0)^* \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0) + \lambda_1 ((L_1 u_1 + L'_{1\lambda} u_0, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0)^* (\mathbf{U}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{U}'_{1\lambda} \mathbf{u}_0)) + \\ & + \lambda_1^3 \left( \left( \frac{1}{2!} L''_{\lambda\lambda} u_1 + \frac{1}{3!} L'''_{\lambda\lambda\lambda} u_0, v_0 \right) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0)^* \left( \frac{1}{2!} \mathbf{U}''_{\lambda\lambda} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{3!} L'''_{\lambda\lambda\lambda} \mathbf{u}_0 \right) \right) + \\ & + \lambda_1 \lambda_2 ((L'_\lambda u_1 + L''_{\lambda\lambda} u_0, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0)^* (\mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_1 + \mathbf{U}''_{\lambda\lambda} \mathbf{u}_0)) = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

С другой стороны, скалярное произведение уравнения (2.38) и функции  $v_1$  с использованием формулы интегрирования (2.5) и тождеств (2.8), (2.1) дает соотношение

$$\begin{aligned} & ((L'_\lambda w_2, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_1)^* \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{w}_2) = -(\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_1 + \tilde{\mathbf{V}}'_\lambda \mathbf{v}_0)^* \mathbf{U}_0 \mathbf{w}_2 + \\ & + \lambda_1^2 (L'_\lambda u_1, v_1) + \gamma \lambda_1 (L'_\lambda u_0, v_1) + (L_1 u_0, v_1) + \lambda_2 (L'_\lambda u_0, v_1) + \frac{\lambda_1^2}{2} (L''_{\lambda\lambda} u_0, v_1) \end{aligned} \quad (2.43)$$



Кроме того, справедливо тождество

$$(L'_\lambda u_1, v_1) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_1 + \tilde{\mathbf{V}}'_\lambda \mathbf{v}_0) * \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0 = (L'_\lambda u_1, v_0) = (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0) * \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_1 \quad (2.44)$$

которое следует из уравнений (2.27), (2.28) и (2.31), (2.32), а также (2.10).

С учетом соотношений (2.41), (2.43) и (2.44) из уравнения (2.42) найдем

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & -\frac{1}{2\sigma_2} ((L_1 u_0, v_1) + (L_1 u_1, v_0) + (L'_\lambda u_0, v_0)) - \\ & -\frac{1}{2\sigma_2} (\mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_0^* (\tilde{\mathbf{V}}^* \mathbf{U}_1)'_\lambda \mathbf{u}_0 + \lambda_1^2 Q) \end{aligned} \quad (2.45)$$

где

$$\begin{aligned} Q = & (L'_\lambda u_1, v_1) + \frac{1}{2!} (L''_{\lambda\lambda} u_0, v_1) + \frac{1}{2!} (L''_{\lambda\lambda} u_1, v_0) + \frac{1}{3!} (L'''_{\lambda\lambda\lambda} u_0, v_0) + \\ & + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_1 + \tilde{\mathbf{V}}'_\lambda \mathbf{v}_0) * \left( \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2!} \mathbf{U}''_{\lambda\lambda} \mathbf{u}_0 \right) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0) * \left( \frac{1}{2!} \mathbf{U}''_{\lambda\lambda} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{3!} \mathbf{U}'''_{\lambda\lambda\lambda} \mathbf{u}_0 \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

а величина  $\sigma_2$  определена вторым соотношением (2.41).

*Двукратное собственное значение  $\lambda_0$ : вырожденный случай.* Разложения (2.35) с коэффициентами, определенными уравнениями (2.41), (2.45), справедливы при условии  $\lambda_1 \neq 0$ . Случай  $\lambda_1 = 0$ , что эквивалентно условию

$$(L_1 u_0, v_0) + \mathbf{v}_0^* \mathbf{V}_0^* \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0 = 0 \quad (2.47)$$

является *вырожденным* и требует отдельного рассмотрения. Подстановка разложений (2.31), (2.32) совместно с разложениями (2.17)–(2.2) в задачу на СЗ (2.3) при условии  $\lambda_1 = 0$  приводит к уравнениям с граничными условиями

$$L_0 w_1 = 0, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{w}_1 = 0 \quad (2.48)$$

$$L_0 w_2 = -\lambda_2 L'_\lambda u_0 - L_1 u_0, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{w}_2 = -\lambda_2 \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0 + \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0 \quad (2.49)$$

$$L_0 w_4 = -\lambda_3 L'_\lambda w_1 - \lambda_2 L'_\lambda w_2 - L_1 w_2 - \lambda_2 L'_\lambda u_0 - \lambda_2^2 \frac{1}{2} L''_{\lambda\lambda} u_0 - \lambda_4 L'_\lambda u_0 - L_2 u_0 \quad (2.50)$$

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{w}_4 = -\lambda_3 \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{w}_1 - \lambda_2 \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{w}_2 - \mathbf{U}_1 \mathbf{w}_2 - \lambda_2 \mathbf{U}'_{1\lambda} \mathbf{u}_0 - \lambda_2^2 \frac{1}{2} \mathbf{U}''_{\lambda\lambda} \mathbf{u}_0 - \lambda_4 \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{u}_0 - \mathbf{U}_2 \mathbf{u}_0$$

Решая уравнения (2.48), (2.49), получим

$$w_1 = \beta u_0, \quad w_2 = \lambda_2 u_1 + \gamma u_0 + \hat{w}_2 \quad (2.51)$$

где  $\beta$  и  $\gamma$  – произвольные постоянные, функция  $\hat{w}_2$  является решением краевой задачи

$$L_0 \hat{w}_2 = -L_1 u_0, \quad \mathbf{U}_0 \hat{\mathbf{w}}_2 = -\mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0 \quad (2.52)$$

а вектор  $\hat{\mathbf{w}}_2 = (\hat{w}_2(0), \hat{w}'_{2_x}(0), \dots, \hat{w}^{(m-1)}_{2_x}(0), \hat{w}_2(1), \hat{w}'_{2_x}(1), \dots, \hat{w}^{(m-1)}_{2_x}(1))$ .

Умножив уравнение (2.49) скалярно на функцию  $v_1$  и учитывая формулу Лагранжа (2.11) и выражения (2.8), (2.10), найдем

$$(L'_\lambda w_2, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0) * \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{w}_2 = -(\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_1 + \tilde{\mathbf{V}}'_\lambda \mathbf{v}_0) * \mathbf{U}_0 \mathbf{w}_2 + \lambda_2 (L'_\lambda u_0, v_1) + (L_1 u_0, v_1) \quad (2.53)$$

Кроме того, скалярное произведение уравнения (2.50) на функцию  $v_0$  с учетом формулы Лагранжа (2.11), граничных условий (2.50) и выражения (2.51) дает

$$\begin{aligned} & \lambda_2((L'_\lambda w_2, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0)^* \mathbf{U}'_\lambda \mathbf{w}_2) + (L_1 w_2, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0)^* \mathbf{U}_1 \mathbf{w}_2 + (L_2 u_0, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0)^* \mathbf{U}_2 \mathbf{u}_0 + \\ & + \lambda_2((L'_{1\lambda} u_0, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0)^* \mathbf{U}'_{1\lambda} \mathbf{u}_0) + \frac{1}{2} \lambda_2^2((L''_{\lambda\lambda} u_0, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0)^* \mathbf{U}''_{\lambda\lambda} \mathbf{u}_0) = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

После подстановки выражения (2.53) в уравнение (2.54) последнее при учете тождества (2.44) и граничных условий (2.38) принимает вид

$$\begin{aligned} & \lambda_2^2 \sigma_2 + \lambda_2((L_1 u_0, v_1) + (L_1 u_1, v_0) + (L'_{1\lambda} u_0, v_0)) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_1 + \\ & + \mathbf{v}_0^* (\tilde{\mathbf{V}}^* \mathbf{U}_1)'_\lambda \mathbf{u}_0 + (L_2 u_0, v_0) + (L_1 \hat{w}_2, v_0) + (\tilde{\mathbf{V}}_0 \mathbf{v}_0)^* (\mathbf{U}_2 \mathbf{u}_0 + \mathbf{U}_1 \hat{\mathbf{w}}_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

Величина  $\sigma_2$  определена вторым соотношением (2.41).

Таким образом, разложение  $\lambda = \lambda_0 + \epsilon \lambda_2 + o(\epsilon)$  и квадратное уравнение (2.55) описывают распад двукратного СЗ при вырождении (2.47).

В случае, когда граничные условия не зависят от параметров или оператор  $L$  является матричным, формула (2.55) упрощается [19]

$$\lambda_2^2 + \lambda_2 \frac{(L_1 u_0, v_1) + (L_1 u_1, v_0) + (L'_{1\lambda} u_0, v_0)}{(L'_\lambda u_1, v_0) + 1/2(L''_{\lambda\lambda} u_0, v_0)} + \frac{(L_2 u_0, v_0) + (L_1 \hat{w}_2, v_0)}{(L'_\lambda u_1, v_0) + 1/2(L''_{\lambda\lambda} u_0, v_0)} = 0 \quad (2.56)$$

Если же оператор  $L$  имеет вид  $Lu \equiv l(\mathbf{p})u - \lambda u$ , где  $l(\mathbf{p})$  – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а граничные условия от  $\lambda$  не зависят, то формула (2.55) преобразуется к виду, полученному в работе [32].

*Собственное значение произвольной кратности.* Выведем теперь формулу, описывающую распад  $\mu$ -кратного СЗ  $\lambda_0$  с цепочкой Келдыша длины  $\mu$ , состоящей из одной собственной функции  $u_0$  и присоединенных функций  $u_1, \dots, u_{\mu-1}$ . Функции, образующие цепочку Келдыша, удовлетворяют уравнениям с граничными условиями [23–25]

$$\begin{aligned} & L_0 u_0 = 0, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{u}_0 = 0 \\ & L_0 u_j = - \sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} L_\lambda^{(r)} u_{j-r}, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{u}_j = - \sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} \mathbf{U}_\lambda^{(r)} \mathbf{u}_{j-r}, \quad j = 1, \dots, \mu - 1 \end{aligned} \quad (2.57)$$

где частные производные вычисляются при  $\lambda = \lambda_0$  и  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ . Цепочка Келдыша для комплексно-сопряженного СЗ  $\bar{\lambda}_0$  оператора  $L_0^*$ , эрмитово-сопряженного к  $L_0$ , удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} & L_0^* v_0 = 0, \quad \mathbf{V}_0 \mathbf{v}_0 = 0 \\ & L_0^* v_j = - \sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} L_{\bar{\lambda}}^{*(r)} v_{j-r}, \quad \mathbf{V}_0 \mathbf{v}_j = - \sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} \mathbf{V}_{\bar{\lambda}}^{*(r)} \mathbf{v}_{j-r}, \quad j = 1, \dots, \mu - 1 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Умножая скалярно уравнения (2.57) на функцию  $v_0$  и принимая во внимание тождество Лагранжа (2.11), придем к соотношениям ортогональности

$$\sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} ((L_\lambda^{(r)} u_{j-r}, v_0) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_\lambda^{(r)} \mathbf{u}_{j-r}) = 0, \quad j = 1, \dots, \mu - 1 \quad (2.59)$$

Уравнения (2.59) содержат в себе условие ортогональности (2.34).

Рассмотрим гладкую вариацию вектора параметров (2.16). Возмущенное СЗ  $\lambda(\epsilon)$  и СФ  $u(\epsilon)$  представляются рядами Ньютона – Пуэизо [34]

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon^{1/\mu} + \lambda_2 \epsilon^{2/\mu} + \dots + \lambda_{\mu-1} \epsilon^{(\mu-1)/\mu} + \lambda_\mu \epsilon + \dots, \quad (2.60)$$

$$u = u_0 + w_1 \epsilon^{1/\mu} + w_2 \epsilon^{2/\mu} + \dots + w_{\mu-1} \epsilon^{(\mu-1)/\mu} + w_\mu \epsilon + \dots, \quad (2.61)$$

Подставим разложения (2.60), (2.61) совместно с (2.17)–(2.20) в задачу на собственные значения (2.3) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $\epsilon$ . Тогда первые  $\mu - 1$  уравнений с граничными условиями примут вид

$$L_0 w_r = - \sum_{j=0}^{r-1} \left( \sum_{\sigma=1}^{r-j} \frac{1}{\sigma!} L_\lambda^{(\sigma)} \sum_{|\alpha|_\sigma = r-j} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_\sigma} \right) w_j, \quad r = 1, \dots, \mu-1 \quad (2.62)$$

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{w}_r = - \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{\sigma=1}^{r-j} \left( \sum_{|\alpha|_\sigma = r-j} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_\sigma} \right) \frac{1}{\sigma!} \mathbf{U}_\lambda^{(\sigma)} \mathbf{w}_j, \quad |\alpha|_\sigma = \alpha_1 + \dots + \alpha_\sigma \quad (2.63)$$

где  $w_0 = u_0$ , а индексы  $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}$  – положительными целыми числа. Уравнение и граничные условия для функции  $w_\mu$  имеют вид

$$L_0 w_\mu = - L_1 w_0 - \sum_{j=0}^{\mu-1} \left( \sum_{\sigma=1}^{\mu-j} \frac{1}{\sigma!} L_\lambda^{(\sigma)} \sum_{|\alpha|_\sigma = \mu-j} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_\sigma} \right) w_j \quad (2.64)$$

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{w}_\mu = - \mathbf{U}_1 \mathbf{w}_0 - \sum_{j=0}^{\mu-1} \sum_{\sigma=1}^{\mu-j} \left( \sum_{|\alpha|_\sigma = \mu-j} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_\sigma} \right) \frac{1}{\sigma!} \mathbf{U}_\lambda^{(\sigma)} \mathbf{w}_j \quad (2.65)$$

Сравнение уравнений (2.62), (2.63) с уравнениями цепочки Келдыша (2.58) дает коэффициенты  $w_r$  в разложениях (2.61)

$$w_r = \sum_{j=1}^r u_j \sum_{|\alpha|_j = r} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_j}, \quad r = 1, \dots, \mu-1 \quad (2.66)$$

которые удовлетворяют граничным условиям (2.63). С использованием функций (2.66) преобразуем уравнения (2.64), (2.65) к виду

$$L_0 w_\mu = - L_1 u_0 - \lambda_1^\mu \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r!} L_\lambda^{(r)} y_{\mu-r} + \sum_{j=1}^{\mu-1} L_0 u_j \sum_{|\alpha|_j = \mu} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_j} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{w}_\mu = - \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0 - \lambda_1^\mu \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r!} \mathbf{U}_\lambda^{(r)} \mathbf{u}_{\mu-r} + \sum_{j=1}^{\mu-1} \mathbf{U}_0 \mathbf{u}_j \sum_{|\alpha|_j = \mu} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_j} \quad (2.68)$$

Умножая уравнение (2.67) скалярно на  $v_0$  и принимая во внимание, что

$$(L_0 u_j, v_0) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_0 \mathbf{u}_j = 0, \quad j = 1, \dots, \mu-1 \quad (2.69)$$

а также тождество Лагранжа (2.11), имеющее здесь вид

$$(L_0 w_\mu, v_0) = \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0 + \lambda_1^\mu \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r!} \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_\lambda^{(r)} \mathbf{u}_{\mu-r} - \sum_{j=1}^{\mu-1} \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_0 \mathbf{u}_j \sum_{|\alpha|_j = \mu} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_j} \quad (2.70)$$

найдем коэффициент  $\lambda_1$  в разложениях (2.60)

$$\lambda_1^\mu = -\frac{1}{\sigma_\mu}((L_1 u_0, v_0) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_1 \mathbf{u}_0), \quad \sigma_\mu = \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r!} ((L_\lambda^{(r)} u_{\mu-r}, v_0) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \mathbf{U}_\lambda^{(r)} \mathbf{u}_{\mu-r}) \quad (2.71)$$

Таким образом, получена явная формула, описывающая распад кратных СЗ с цепочкой Келдыша произвольной длины для линейных дифференциальных операторов, аналитически зависящих от комплексного спектрального параметра и являющихся гладкими функциями вектора действительных параметров.

**3. Аналитическое описание “парадокса дестабилизации”.** Сформулируем теперь обобщенную задачу на собственные значения, возникающую при исследовании устойчивости вязкоупругих систем

$$L(\lambda, q, \mathbf{k})u \equiv N(q)u + \lambda D(\mathbf{k})u + \lambda^2 M u = 0 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{U}(q, \mathbf{k}, \lambda)\mathbf{u} \equiv \mathbf{U}_N(q)\mathbf{u} = 0 \quad (3.2)$$

Коэффициенты дифференциальных операторов  $N, D, M$  порядка  $m$  и матрицы  $\mathbf{U}_N$  размерности  $m \times 2m$  предполагаются действительными. Оператор  $N(q)$  и матрица  $\mathbf{U}_N(q)$  гладко зависят от действительного параметра нагрузки  $q \geq 0$ , а коэффициенты дифференциального оператора  $D(\mathbf{k})$ , порядок которого не превосходит  $m$ , – гладкие функции вектора действительных параметров диссипации  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$ , причем при  $\mathbf{k} = 0$  оператор  $D(0) = 0$ . Также предполагается, что оператор  $M$  от параметров не зависит. Таким образом, возмущение системы малыми диссипативными силами ( $|\mathbf{k}| \ll 1$ ) является регулярным [34].

Предполагается, что невозмущенная система

$$N(q)u + \lambda^2 M u = 0, \quad \mathbf{U}_N(q)\mathbf{u} = 0 \quad (3.3)$$

на интервале  $0 \leq q < q_0$  имеет дискретный спектр, состоящий из простых чисто мнимых СЗ  $\lambda = i\omega$ , и, следовательно, устойчива, а при  $q = q_0$  существует пара двукратных СЗ  $\pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$  с цепочкой Келдыша длины 2 (неустойчивость) [31, 32]. Собственная  $u_0$  и присоединенная  $u_1$  функции СЗ  $i\omega_0$  удовлетворяют уравнениям (2.27), (2.28), которые принимают здесь вид

$$L_0 u_0 \equiv N(q_0)u_0 - \omega_0^2 M u_0 = 0, \quad \mathbf{U}_0 \mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{U}_N(q_0)\mathbf{u}_0 = 0 \quad (3.4)$$

$$N(q_0)u_1 - \omega_0^2 M u_1 = -2i\omega_0 M u_0, \quad \mathbf{U}_N(q_0)\mathbf{u}_1 = 0 \quad (3.5)$$

В силу действительности коэффициентов операторов и матриц, входящих в уравнения (3.4), (3.5), выберем собственную функцию  $u_0$  действительной. Тогда присоединенная функция  $u_1$  будет чисто мнимой. Все остальные СЗ  $\pm i\omega_{0,j}$ ,  $\omega_{0,j} > 0$  невозмущенной системы при  $q = q_0$  предполагаются простыми и чисто мнимыми. Следовательно, при отсутствии диссипативных сил ( $\mathbf{k} = 0$ ) и  $q = q_0$  неконсервативная система находится на границе между областями устойчивости и флаттера [31, 32].

Поскольку коэффициенты оператора  $L$  полиномиально зависят от спектрального параметра  $\lambda$ , то матрица  $\mathbf{L}(x)$ , определенная формулой (2.7), имеет вид

$$\mathbf{L}(x) = \lambda^2 \mathbf{M}(x) + \lambda \mathbf{D}(x, \mathbf{k}) + \mathbf{N}(x, q) \quad (3.6)$$

Компоненты матриц  $\mathbf{M}, \mathbf{D}$  и  $\mathbf{N}$  находятся по формулам, аналогичным (2.7), и состоят из коэффициентов операторов  $M, D$  и  $N$  и их производных по  $x$ , соответственно. Выбрав действительную матрицу  $\tilde{\mathbf{U}}$  размерности  $m \times 2m$ , по формуле (2.9) найдем мат-

рицы  $\mathbf{V}$  и  $\tilde{\mathbf{V}}$  размерности  $m \times 2m$ , определяющие граничные условия сопряженной задачи на собственные значения.

Собственная  $v_0$  и присоединенная  $v_1$  функции комплексно-сопряженного СЗ  $-i\omega_0$  удовлетворяют уравнениям и граничным условиям

$$N^*(q_0)v_0 - \omega_0^2 M^* v_0 = 0, \quad \mathbf{V}_0 \mathbf{v}_0 = 0 \quad (3.7)$$

$$N^*(q_0)v_1 - \omega_0^2 M^* v_1 = 2i\omega_0 M^* v_0, \quad \mathbf{V}_0 \mathbf{v}_1 = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \bar{\lambda}} \mathbf{v}_0 \quad (3.8)$$

Поскольку матрицы  $\mathbf{U}_0$  и  $\tilde{\mathbf{U}}_0$  действительные, а матричный полином  $\mathbf{L}(x)$ , заданный уравнением (3.6), имеет действительные коэффициенты, то, согласно формуле (2.9), матрицы  $\mathbf{V}_0$  и  $\tilde{\mathbf{V}}_0$  также действительны, а матрицы  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \bar{\lambda}}(\bar{\lambda}_0, \mathbf{p}_0)$  и  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \bar{\lambda}}(\bar{\lambda}_0, \mathbf{p}_0)$  – чисто мнимые. Следовательно, функцию  $v_0$  можно выбрать действительной, а  $v_1$  – чисто мнимой.

Так как функции  $u_0, v_0$  определены с точностью до произвольных множителей, а  $u_1, v_1$  – до слагаемых  $\gamma_1 u_0, \gamma_2 v_0$ , соответственно, где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются произвольными постоянными, то выберем действительные функции  $u_0, v_0$  и чисто мнимые функции  $u_1, v_1$  удовлетворяющими условиям нормировки и ортогональности

$$2i\omega_0(Mu_1, v_0) = 1, \quad 2i\omega_0(Mu_1, v_1) + (Mu_0, v_1) + (Mu_1, v_0) = 0 \quad (3.9)$$

Изучим, как устойчивость системы (3.1), (3.2) зависит от линейных возмущений вектора параметров  $\mathbf{p} = (\mathbf{k}, q)$

$$\mathbf{p}(\epsilon) = \mathbf{p}_0 + \epsilon \dot{\mathbf{p}}, \quad \epsilon \geq 0 \quad (3.10)$$

где точка означает производную по малому параметру  $\epsilon$ , вычисленную при  $\epsilon = 0$ . В случае общего положения возмущенное двукратное СЗ определяется рядом Ньютона – Пуансо (2.35). Подставляя оператор  $L$ , заданный уравнением (3.1), в уравнения (2.41), (2.45) и принимая во внимание условия нормировки (3.9), получим коэффициенты  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$

$$\lambda_1^2 = -i\omega_0 \langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{k}} \rangle - \tilde{f} \dot{q}, \quad 2\lambda_2 = -\langle \mathbf{f} - \omega_0 \mathbf{h}, \dot{\mathbf{k}} \rangle - i\tilde{h} \dot{q} \quad (3.11)$$

где вектор  $\dot{\mathbf{k}} = (\dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n-1})$ , угловые скобки обозначают скалярное произведение действительных векторов в  $R^{n-1}$ , компоненты действительного вектора  $\mathbf{f}$  и действительная скалярная величина  $\tilde{f}$  имеют вид

$$f_r = \left( \frac{\partial D}{\partial k_r} u_0, v_0 \right), \quad \tilde{f} = \left( \frac{\partial N}{\partial q} u_0, v_0 \right) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \frac{\partial \mathbf{U}_N}{\partial q} \mathbf{u}_0, \quad r = 1, \dots, n-1 \quad (3.12)$$

а компоненты действительного вектора  $\mathbf{h}$  и действительной скалярной величины  $\tilde{h}$  определены выражениями

$$uh_r = \left( \frac{\partial D}{\partial k_r} u_1, v_0 \right) + \left( \frac{\partial D}{\partial k_r} u_0, v_1 \right), \quad r = 1, \dots, n-1 \quad (3.13)$$

$$i\tilde{h} = \left( \frac{\partial N}{\partial q} u_1, v_0 \right) + \left( \frac{\partial N}{\partial q} u_0, v_1 \right) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \frac{\partial \mathbf{U}_N}{\partial q} \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \frac{\partial \mathbf{U}_N}{\partial q} \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_0^* \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \bar{\lambda}} \right)^* \frac{\partial \mathbf{U}_N}{\partial q} \mathbf{u}_0 \quad (3.14)$$

Таким образом, из уравнений (3.9)–(3.14) получим

$$\lambda = i\omega_0 \pm \sqrt{-i\omega_0 \langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle - \tilde{f}(q - q_0)} - \frac{1}{2} (\langle \mathbf{f} - \omega_0 \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle + i\tilde{h}(q - q_0)) + o(|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|) \quad (3.15)$$

Формула (3.15) описывает расщепление двукратного СЗ  $i\omega_0$  при изменении параметров  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$  и  $q$  в случае, когда подкоренное выражение не равно нулю. Если  $\mathbf{k} = 0$ , то двукратное СЗ расщепляется на два простых чисто мнимых (устойчивость), если  $\tilde{f}(q - q_0) > 0$ . Будем предполагать, что постоянная  $\tilde{f} < 0$ . Тогда система устойчива при  $q < q_0$ , и неустойчива при  $q > q_0$ . Случай  $\tilde{f} = 0$  является вырожденным и рассматриваться здесь не будет. При достаточно малых вариациях параметров  $\mathbf{k}$  и  $q$  двукратное СЗ  $i\omega_0$  расщепляется в общем случае на два простых комплексных, одно из которых имеет положительную действительную часть (флаттер). Тем не менее, если  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle = 0$  и  $\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0$ , то при  $q < q_0$  квадратный корень в уравнении (3.15) чисто мнимый, и для достаточно малых возмущений параметров двукратное СЗ  $i\omega_0$  (а также  $-i\omega_0$ ) расщепляется на два простых с отрицательными действительными частями (устойчивость).

Асимптотическая устойчивость системы (3.1), (3.2) при возмущении (3.10) зависит также от поведения простых чисто мнимых СЗ  $\pm i\omega_{0,s}$ ,  $\omega_{0,s} > 0$ . Выберем действительные собственные функции  $u_{0,s}$ ,  $v_{0,s}$  СЗ  $i\omega_{0,s}$  удовлетворяющими условиям нормировки

$$2\omega_{0,s}(Mu_{0,s}, v_{0,s}) = 1 \quad (3.16)$$

В соответствии с уравнениями (2.23) и (2.26) приращения простых СЗ  $\pm i\omega_{0,s}$  при изменении параметров определяются уравнениями

$$\lambda = \pm i\omega_{0,s} \mp i\tilde{g}_s(q - q_0) - \omega_{0,s} \langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle + o(|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2), \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Действительная величина  $\tilde{g}_s$  и компоненты действительного вектора  $\mathbf{g}_s$  имеют вид

$$\tilde{g}_s = \left( \frac{\partial N}{\partial q} u_{0,s}, v_{0,s} \right) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \frac{\partial U_N}{\partial q} \mathbf{u}_{0,s}, \quad g_{s,r} = \left( \frac{\partial D}{\partial k_r} u_{0,s}, v_{0,s} \right), \quad r = 1, \dots, n-1 \quad (3.18)$$

Величина  $\text{Re} \lambda_s < 0$  при  $\langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle > 0$ .

Из соотношений (3.15), (3.17) следует, что система (3.1), (3.2) асимптотически устойчива при достаточно малых линейных вариациях параметров  $\mathbf{k}$ ,  $q$ , заданных уравнением (3.10), если выполнены следующие условия:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle = 0, \quad q < q_0, \quad \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0, \quad \langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle > 0, \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Соотношения (3.19) показывают, что множество направлений, ведущих из точки  $\mathbf{p}_0$  в область асимптотической устойчивости, имеет размерность  $n - 1$  в  $n$ -мерном пространстве параметров системы  $k_1, \dots, k_{n-1}, q$ . Таким образом, выйдя из точки  $\mathbf{p}_0$ , можно достичь других точек области асимптотической устойчивости только следуя вдоль кривых, касательных к плоскости  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle = 0$  в точке  $\mathbf{p}_0$ . Для того чтобы получить более точные результаты о геометрии области устойчивости в окрестности точки  $\mathbf{p}_0 = (0, \dots, 0, q_0)$ , рассмотрим вариацию вектора параметров вдоль гладкой кривой

$$\mathbf{p}(\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\epsilon^2}{2} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{k}} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} + o(\epsilon^2) \quad (3.20)$$

предполагая, что

$$\langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{k}} \rangle = 0 \quad (3.21)$$

Кривая (3.20), (3.21) ортогональна оси  $q$  в пространстве параметров  $\mathbf{k}$ ,  $q$ , поскольку  $\dot{q} \equiv 0$ .

Коэффициент  $\lambda_1$  в разложении (2.35), определяемый первым из уравнений (3.11), обращается в нуль вдоль кривой (3.20), (3.21). Следовательно, двукратное СЗ  $i\omega_0$  в этом вырожденном случае распадается на два простых, зависящих линейно от  $\epsilon$  [34],

$$\lambda = i\omega_0 + \lambda_2\epsilon + o(\epsilon) \quad (3.22)$$

Коэффициент  $\lambda_2$  – корень квадратного уравнения (2.55), которое для оператора  $L$  с граничными условиями, заданными соотношениями (3.1), (3.2) и для собственных и присоединенных функций, удовлетворяющих уравнениям (3.4), (3.5) и (3.7), (3.8), принимает вид

$$\lambda_2^2 - \lambda_2\omega_0\langle \mathbf{h}, \dot{\mathbf{k}} \rangle + \left(\frac{1}{2}\tilde{f}\dot{q} + \omega_0^2\langle \mathbf{G}\dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle\right) + i\omega_0\left(\frac{1}{2}\langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{k}} \rangle + \langle \mathbf{H}\dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle\right) = 0 \quad (3.23)$$

В уравнении (3.23) действительные векторы  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{h}$  и коэффициенты  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{h}$  определяются равенствами (3.12)–(3.14), действительная матрица  $\mathbf{H}$  имеет компоненты

$$H_{r\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial k_r \partial k_\sigma} u_0, v_0\right), \quad r, \sigma = 1, \dots, n-1 \quad (3.24)$$

а действительная матрица  $\mathbf{G}$  определяется выражением

$$\langle \mathbf{G}\dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle = \sum_{r=1}^{n-1} \dot{k}_r \left(\frac{\partial D}{\partial k_r} \hat{w}_2, v_0\right) \quad (3.25)$$

где  $\hat{w}_2$  – решение краевой задачи

$$N(q_0)\hat{w}_2 - \omega_0^2 M\hat{w}_2 = \sum_{r=1}^{n-1} \dot{k}_r \frac{\partial D}{\partial k_r} u_0, \quad \mathbf{U}_N(q_0)\hat{\mathbf{w}}_0 = 0 \quad (3.26)$$

Решение задачи (3.26) существует в силу выполнения условия разрешимости, эквивалентного (3.21).

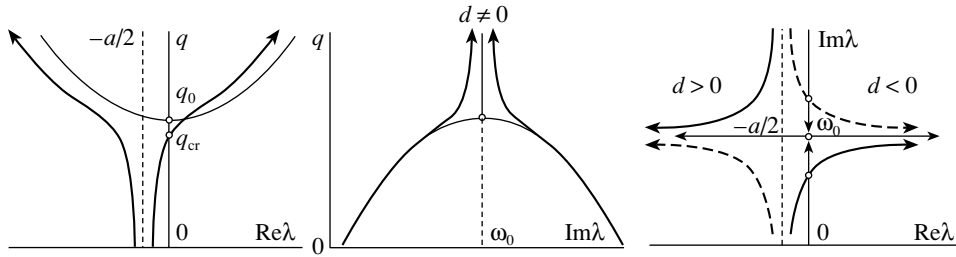
Принимая во внимание явные уравнения (3.2), (3.21) кривой  $\mathbf{p}(\epsilon)$  и выражение (3.22), запишем уравнение (3.23) в виде

$$(\lambda - i\omega_0)^2 - \omega_0\langle \mathbf{h}, \dot{\mathbf{k}} \rangle(\lambda - i\omega_0) + \tilde{f}(q - q_0) + \omega_0^2\langle \mathbf{G}\dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle + i\omega_0(\langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{k}} \rangle + \langle \mathbf{H}\dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle) = 0 \quad (3.27)$$

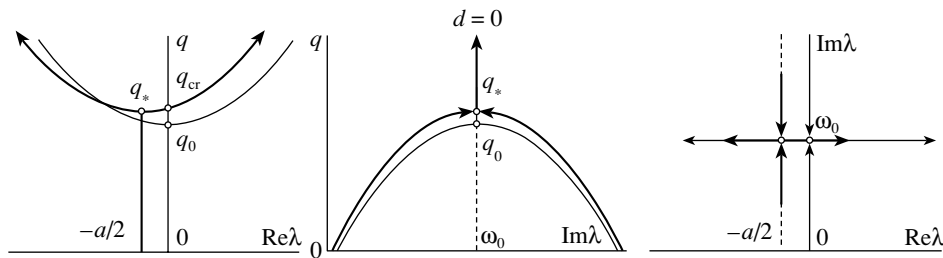
Уравнение (3.27) описывает распад двукратного СЗ  $i\omega_0$  при малом возмущении параметров  $\mathbf{k}$  и  $q$ . Для более подробного изучения этого процесса подставим  $\lambda = \text{Re}\lambda + i\text{Im}\lambda$  в уравнение (3.27), отделим вещественные и мнимые части и, преобразуя их, найдем

$$(\text{Im}\lambda - \omega_0 + \text{Re}\lambda + a/2)^2 - (\text{Im}\lambda - \omega_0 + \text{Re}\lambda + a/2)^2 = -2d \quad (3.28)$$

$$\left(\text{Re}\lambda + \frac{a}{2}\right)^4 + \left(c - \frac{a^2}{4}\right)\left(\text{Re}\lambda + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} \quad (3.29)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$(\text{Im}\lambda - \omega_0)^4 - \left(c - \frac{a^2}{4}\right)(\text{Im}\lambda - \omega_0)^2 = \frac{d^2}{4} \quad (3.30)$$

где

$$a = -\omega_0 \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle, \quad c = \tilde{f}(q - q_0) + \omega_0^2 \langle \mathbf{Gk}, \mathbf{k} \rangle, \quad d = \omega_0 (\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{Hk}, \mathbf{k} \rangle) \quad (3.31)$$

Рассмотрим сначала случай, когда система циркуляционная ( $\mathbf{k} = 0$ ). Тогда в соответствии с уравнением (3.31) величины  $a = 0$ ,  $c = \tilde{f}(q - q_0)$ ,  $d = 0$ , и уравнения (3.29), (3.3) принимают вид

$$q \leq q_0: \text{Re}\lambda = 0, \quad \text{Im}\lambda = \omega_0 \pm \sqrt{\tilde{f}(q - q_0)} \quad (3.32)$$

$$q \geq q_0: \text{Re}\lambda = \pm \sqrt{-\tilde{f}(q - q_0)}, \quad \text{Im}\lambda = \omega_0 \quad (3.33)$$

Уравнения (3.32), (3.33) показывают, что при увеличении параметра нагрузки  $q$  два простых чисто мнимых СЗ движутся вдоль мнимой оси, сталкиваются при  $q = q_0$  и затем расходятся в направлении, перпендикулярном к мнимой оси с образованием пары простых комплексных СЗ (флаттер). Такое поведение СЗ известно как *сильное взаимодействие*, типичное для циркуляционных систем [22]. Траектории СЗ циркуляционной системы при изменении параметра  $q$  показаны на фиг. 2 и 3 тонкими линиями.

Если  $\mathbf{k} \neq 0$  и  $d \neq 0$ , то диссипативные и гироскопические силы разрушают сильное взаимодействие СЗ, сдвигая и расщепляя их траектории, как показано на фиг. 1 и 2 жирными линиями. Этот качественный эффект, известный в литературе лишь из численных решений частных механических задач [2, 12], *аналитически* описывается уравнениями (3.28)–(3.30).



В самом деле, для фиксированного вектора  $\mathbf{k} \neq 0$  при изменении параметра  $q$  СЗ движутся на комплексной плоскости вдоль ветвей гиперболы (3.28), имеющей две асимптоты  $\operatorname{Re} \lambda = -a/2$  и  $\operatorname{Im} \lambda = \omega_0$ , величина  $a$  определена первым из уравнений (3.31). Если  $a > 0$ , то одно из двух СЗ находится в левой части комплексной плоскости, тогда как другое пересекает мнимую ось и переходит в правую часть при  $q = q_{\text{cr}}(\mathbf{k})$ . Таким образом, условие  $a > 0$  или, эквивалентно,  $\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0$  является необходимым условием асимптотической устойчивости. Уравнения (3.29), (3.30) описывают вещественную и мнимую части СЗ  $\lambda$  как функции параметров  $q$  и  $\mathbf{k}$ . Функции  $\operatorname{Re} \lambda(q)$  и  $\operatorname{Im} \lambda(q)$  для  $\mathbf{k} \neq 0$  показаны на фиг. 2 жирными линиями. Значение параметра  $q$ , при котором одно из СЗ пересекает мнимую ось, следует из уравнения (3.29), если предположить в нем  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ . Это дает соотношение  $ca^2 = d^2$ , которое при учете явных выражений (3.31) для величин  $a$ ,  $c$ , и  $d$  принимает вид

$$q_{\text{cr}}(\mathbf{k}) = q_0 + \frac{(\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle)^2}{\tilde{f} \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle^2} - \frac{\omega_0^2}{\tilde{f}} \langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle \quad (3.34)$$

Таким образом, оба СЗ находятся в левой части комплексной плоскости, если

$$q < q_{\text{cr}}(\mathbf{k}), \quad \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0 \quad (3.35)$$

Необходимые и достаточные условия (3.35) того, что все корни комплексного полинома (3.27) имеют отрицательные вещественные части, могут быть получены также из критерия Бильхарца [38], который является аналогом критерия Рауса – Гурвица для комплексных полиномов.

Поскольку, по предположению,  $\tilde{f} < 0$ , то из формулы (3.34) следует, что критическая нагрузка системы с диссипацией  $q_{\text{cr}}(\mathbf{k}) < q_0$ , если  $\langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle < 0$ . Напротив, при  $\langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle > 0$  существует область изменения вектора параметров  $\mathbf{k}$ , определенная вторым неравенством (3.35) и условием

$$(\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle)^2 - \omega_0^2 \langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0 \quad (3.36)$$

в которой критическая нагрузка системы с диссипацией  $q_{\text{cr}}(\mathbf{k}) > q_0$ .

Подставляя  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  в уравнение (3.28), найдем выражение для критической частоты

$$\omega_{\text{cr}}(\mathbf{k}) = \operatorname{Im} \lambda_{\text{cr}}(\mathbf{k}) = \omega_0 + \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle}{\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle} \quad (3.37)$$

Отсюда следует, что скачок критической частоты за счет малой диссипации  $\mathbf{k} = \epsilon \tilde{\mathbf{k}}$  составляет

$$\Delta \omega \equiv \omega_0 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_{\text{cr}}(\epsilon \tilde{\mathbf{k}}) = -\frac{\langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle}{\langle \mathbf{h}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle} \quad (3.38)$$

В случае, когда

$$d \equiv \omega_0(\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle) = 0$$

сильное взаимодействие СЗ сохраняется при введении малых сил, зависящих от скорости ( $\mathbf{k} \neq 0$ ). В соответствии с формулами (3.29), (3.3), принимающими в этом случае вид

$$q \leq q_*: \operatorname{Re} \lambda = \omega_0 \frac{\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle}{2}, \quad \operatorname{Im} \lambda = \omega_0 \pm \sqrt{\tilde{f}(q - q_*)} \quad (3.39)$$

$$q \geq q_*: \operatorname{Re} \lambda = \omega_0 \frac{\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle}{2} \pm \sqrt{-\tilde{f}(q - q_*)}, \quad \operatorname{Im} \lambda = \omega_0 \quad (3.40)$$

комплексные СЗ  $\lambda$  с  $\operatorname{Re} \lambda = -a/2$  сильно взаимодействуют при  $q = q_*$ , где

$$q_* = q_0 + \omega_0^2 \frac{\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle^2 - 4 \langle \mathbf{Gk}, \mathbf{k} \rangle}{4 \tilde{f}} \quad (3.41)$$

При дальнейшем возрастании параметра  $q$  двукратное СЗ  $\lambda_* = -a/2 + i\omega_0$  расщепляется на два простых комплексно-сопряженных (фиг. 3), причем одно из них пересекает мнимую ось при значении  $q = q_{\text{cr}}(\mathbf{k})$ , заданном уравнением (3.34). Это условие принимает вид

$$q_{\text{cr}}(\mathbf{k}) = q_0 - \frac{\omega_0^2}{\tilde{f}} \langle \mathbf{Gk}, \mathbf{k} \rangle \quad (3.42)$$

Таким образом, приходим к заключению, что в случае  $d = 0$  малые диссипативные силы лишь сдвигают картину сильного взаимодействия СЗ с мнимой оси, как показано на фиг. 3 для  $a > 0$ . Как и в предыдущем случае ( $d \neq 0$ ), оба СЗ находятся в левой полуплоскости, если выполнены условия (3.35). При этом, как следует из формул (3.42) и (3.39), (3.4), нет скачка критической нагрузки и частоты. Если, дополнительно,  $\langle \mathbf{Gk}, \mathbf{k} \rangle > 0$ , то, в соответствии с уравнением (3.42), критическая нагрузка возрастает при наличии малых диссипативных сил.

Ограничимся случаем, когда

$$\{\mathbf{k}: \langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle = 0, \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0\} \subset \{\mathbf{k}: \langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle = 0, s = 1, 2, \dots\} \quad (3.43)$$

означающим, что все простые СЗ  $\pm i\omega_{0,s}$  сдвигаются при малом возмущении параметров  $q$  и  $\mathbf{k}$  в левую часть комплексной плоскости, поэтому устойчивость системы (3.1), (3.2) зависит лишь от распада двукратных СЗ  $\pm i\omega_0$ . Таким образом, поверхность  $q_{\text{cr}}(k_1, \dots, k_{n-1})$ , аппроксимируемая уравнением (3.34) при ограничении, задаваемом вторым неравенством (3.35), является границей области асимптотической устойчивости (3.35) в малой окрестности точки  $\mathbf{p}_0 = (0, \dots, 0, q_0)$ .

Функция  $q_{\text{cr}}(\mathbf{k})$ , заданная уравнением (3.34), состоит из рациональной и полиномиальной частей. Рациональная часть содержит линейные формы по отношению к вектору  $\mathbf{k}$  в числителе и знаменателе. Таким образом, функция  $q_{\text{cr}}(\mathbf{k})$  имеет особенность в точке  $\mathbf{k} = 0$ , и критическая нагрузка как функция  $n - 1$  переменной не имеет предела при  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n-1}) \rightarrow 0$ . Этот факт был впервые установлен для критической нагрузки маятника Циглера [13, 15] и оказался справедливым для произвольных линейных неконсервативных систем с конечным числом степеней свободы [20]. Тем не менее однородность числителя и знаменателя рациональной части функции  $q_{\text{cr}}(\mathbf{k})$  гарантирует существование предела  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\text{cr}}(\epsilon \tilde{\mathbf{k}})$  для любого направления  $\tilde{\mathbf{k}}$ , такого, что  $\langle \mathbf{h}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle \neq 0$ . Подставляя  $\mathbf{k} = \epsilon \tilde{\mathbf{k}}$  в уравнение (3.34), найдем явное выражение, аппроксимирующее скачок критической нагрузки за счет малых диссипативных сил

$$\Delta q \equiv q_0 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\text{cr}}(\epsilon \tilde{\mathbf{k}}) = -\frac{1}{\tilde{f}} \frac{\langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle^2}{\langle \mathbf{h}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle^2} \quad (3.44)$$

Если  $\langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle = 0$ , то скачок критической нагрузки отсутствует ( $\Delta q = 0$ ). Для двумерного вектора  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$  это условие дает отношение параметров  $k_1$  и  $k_2$

$$\frac{k_1}{k_2} = -\frac{f_j}{f_i}, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.45)$$

при котором малые силы, зависящие от скорости, не уменьшают критическую нагрузку. Величины  $f_1, f_2$  определяются первым из уравнений (3.12). Сильная зависимость критической нагрузки от отношения параметров диссипации впервые была отмечена В.В. Болотиным [2, 4].

Функция  $q_{cr}(\mathbf{k})$ , заданная уравнением (3.34) при ограничении (3.35), определяет границу между областями асимптотической устойчивости и флаттера системы (3.1), (3.2) в  $n$ -мерном пространстве параметров  $\mathbf{k}, q$ . Множества уровня функции (3.34) являются границами области устойчивости в пространстве параметров  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$ . Множество уровня  $q_{cr} = q_0$ , где  $q_0$  – критическое значение параметра  $q$  для невозмущенной циркуляционной системы (3.3), дается уравнением

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle = \pm \omega_0 \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle \sqrt{\langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle} - \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle \quad (3.46)$$

Действительные решения этого уравнения существуют, если  $\langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle > 0$ . В этом случае множество (3.46) ограничивает область изменения вектора параметров диссипации (3.36), в которой критическая нагрузка  $q_{cr}(\mathbf{k}) > q_0$ . В случае отрицательной определенности матрицы  $\mathbf{G}$  величина  $\langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle$ , и уравнение (3.46) имеет единственное действительное решение  $\mathbf{k} = 0$ , что означает снижение критической нагрузки (дестабилизацию) при любых малых  $\mathbf{k} \neq 0$ .

Рассмотрим случай, когда вектор параметров диссипации состоит из двух компонент  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ . Тогда граница области устойчивости, описываемая функцией  $q_{cr}(k_1, k_2)$ , является поверхностью в трехмерном пространстве параметров  $k_1, k_2, q$ . Для того чтобы понять, как устроена эта поверхность, найдем асимптотические формулы для линий уровня функции  $q_{cr}(k_1, k_2)$  в окрестности начала координат на плоскости параметров  $k_1, k_2$  для  $q_{cr}$ , близких к  $q_0$ .

Сначала получим аппроксимации линий уровня для  $q_{cr} < q_0$  в предположении, что один из параметров  $k_1, k_2$  – гладкая функция другого. Подставляя в уравнение (3.34) разложение

$$k_i = \beta_j k_j + o(k_j), \quad i, j = 1, 2$$

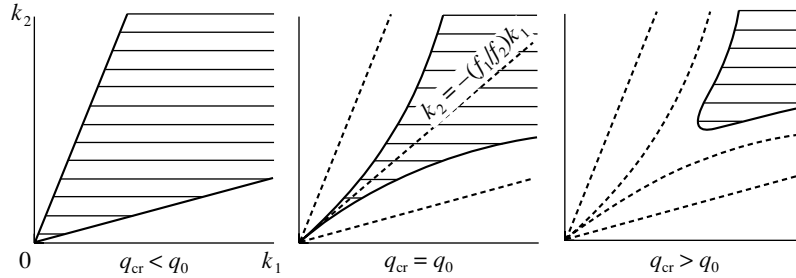
где  $\beta_j$  – неизвестные постоянные, и собирая члены при одинаковых степенях  $k_j$ , получим в первом приближении

$$k_i = - \frac{f_j \pm h_j \sqrt{\tilde{f}(q_{cr} - q_0)}}{f_i \pm h_i \sqrt{\tilde{f}(q_{cr} - q_0)}} k_j + o(k_j), \quad i, j = 1, 2 \quad (3.47)$$

Так как по предположению  $\tilde{f} < 0$  и  $q_{cr} < q_0$ , квадратные корни в уравнении (3.47) – действительные величины. Следовательно, для  $q_{cr} < q_0$  область асимптотической устойчивости на плоскости  $k_1, k_2$  в первом приближении ограничивается двумя прямыми, пересекающимися в начале координат, как показано на фиг. 4. Заметим, что лишь та часть поверхности  $q_{cr}(k_1, k_2)$ , что принадлежит полупространству  $\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0$ , ограничивает область асимптотической устойчивости.

Из уравнения (3.47) следует, что с увеличением  $q_{cr}$  угол между линиями, ограничивающими область асимптотической устойчивости, уменьшается, обращаясь в нуль при  $q_{cr} = q_0$ . В этом случае уравнения первого приближения (3.47) дают лишь отношение параметров  $k_1$  и  $k_2$ , совпадающее с (3.45). Подставляя в уравнение (3.46)

$$k_i = - (f_j / f_i) k_j + \gamma_j k_j^2 + o(k_j^2)$$



Фиг. 4

с неизвестными постоянными  $\gamma_j$  и собирая члены при одинаковых степенях  $k_j$ , найдем аппроксимацию второго порядка линии уровня  $q_{cr} = q_0$

$$k_i = -\frac{f_j}{f_i}k_j - \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{H}^\dagger \mathbf{f} \pm \omega_0 (h_i f_j - h_j f_i) \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{G}^\dagger \mathbf{f}}}{f_i^3} k_j^2 + o(k_j^2), \quad i, j = 1, 2 \tag{3.48}$$

$$\mathbf{H}^\dagger = \begin{vmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{21} & H_{11} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G}^\dagger = \begin{vmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{vmatrix}$$

где  $H_{rs}, G_{rs}$  ( $r, s = 1, 2$ ) – компоненты матриц  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$ , определенные уравнениями (3.24), (3.25). Уравнение (3.48) описывает две кривые, касающиеся друг друга в начале координат на плоскости параметров  $k_1, k_2$ , образуя вырожденную особенность, известную как точка возврата [15]. В общем случае прямая  $k_i = -(f_j/f_i)k_j$  не всегда лежит внутри этой особенности. Но в случае, когда матрица  $\mathbf{D}(\mathbf{k})$  – линейная функция параметров, эта прямая всегда принадлежит области асимптотической устойчивости (фиг. 4) поскольку матрица  $\mathbf{H}$ , состоящая из вторых производных матрицы  $\mathbf{D}(\mathbf{k})$  по параметрам  $k_1$  и  $k_2$ , обращается в нуль.

Чтобы изучить линии уровня для  $q_{cr} > q_0$ , перепишем уравнение (3.34) следующим образом:

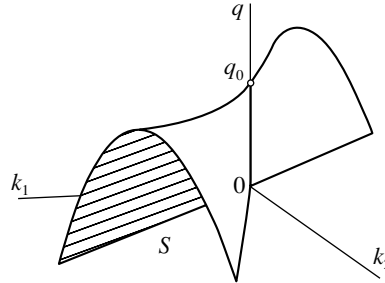
$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle = \pm \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle \sqrt{\tilde{f}(q_{cr} - q_0) + \omega_0^2 \langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle} \tag{3.49}$$

Если  $\langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle > 0$ , то вещественные решения уравнения (3.49), описывающие линии уровня  $q_{cr} > q_0$ , существуют, если только подкоренное выражение в (3.49) положительно, или, эквивалентно,

$$|\mathbf{k}| \equiv \sqrt{\langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle} > \frac{\sqrt{-\tilde{f}(q_{cr} - q_0)}}{\omega_0 \sqrt{\langle \mathbf{G}\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle}} > 0 \tag{3.50}$$

где  $\mathbf{e} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ . Условие (3.50) означает, что линии уровня  $q_{cr} > q_0$  не проходят через начало координат. Более того, они удалены от начала координат на расстояние, определенное правой частью неравенства (3.5), как показано на фиг. 4.

Таким образом, проанализировав линии уровня функции  $q_{cr}(k_1, k_2)$ , можно утверждать, что граница области асимптотической устойчивости, описываемая уравнением (3.34), в окрестности точки  $(0, 0, q_0)$  в пространстве трех параметров системы качественно выглядит так, как изображено на фиг. 5. Это означает, что поверхность (3.34) имеет особенность типа “зонтик Уитни” [39] в точке  $(0, 0, q_0)$ . Второе условие (3.35) отсекает



Фиг. 5

половину зонтика; оставшаяся часть ограничивает область асимптотической устойчивости, обозначенную на фиг. 5 буквой  $S$ . Известно, что зонтик Уитни – особенность общего положения границы области устойчивости трехпараметрических *конечномерных* неконсервативных систем, отвечающая двукратному чисто мнимому СЗ с цепочкой Жордана длины 2 [16, 39]. В механических приложениях эта особенность была впервые найдена на границе области устойчивости маятника Циглера [14–16]. Выше показано, что зонтик Уитни – особенность границы области асимптотической устойчивости и в *распределенных* неконсервативных системах вида (3.1), (3.2), зависящих от трех параметров.

**4. Пример. Устойчивость вязкоупругого стержня.** Вернемся к задаче (1.1), (1.2) о поперечных колебаниях в вязкой среде консольного стержня из вязкоупругого материала Кельвина-Фойхта, нагруженного на свободном конце тангенциальной следящей силой  $q$  (фиг. 6). В безразмерных переменных задача устойчивости сводится к исследованию задачи на собственные значения (1.3), (1.4) [7]. Матрица граничных условий задачи (1.3), (1.4) имеет вид

$$\mathbf{U} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная, а  $\mathbf{O}$  – нулевая матрицы размерности  $2 \times 2$ . По формуле (2.7) найдем

$$\mathbf{L}(x) = \begin{vmatrix} -q\mathbf{J} & -(1 + \eta\lambda)\mathbf{J} \\ -(1 + \eta\lambda)\mathbf{J} & \mathbf{O} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

Выбрав матрицу  $\tilde{\mathbf{U}}$  в виде

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

по формуле (2.9) получим

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & q\mathbf{J} & (1 + \eta\bar{\lambda})\mathbf{J} \\ -(1 + \eta\bar{\lambda})\mathbf{J} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{vmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \begin{vmatrix} q\mathbf{J} & (1 + \eta\bar{\lambda})\mathbf{J} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & -(1 + \eta\bar{\lambda})\mathbf{J} & \mathbf{O} \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

В соответствии с формулами (2.6), (2.15) задача, сопряженная с задачей (1.3), (1.4), имеет вид

$$(1 + \eta\bar{\lambda})v_{xxxx} + qv_{xx} + (\bar{\lambda}^2 + \mu\bar{\lambda})v = 0, \quad (4.5)$$

$$(1 + \eta\bar{\lambda})v_{xxx}'''(1) + qv'_x(1) = 0, \quad (1 + \eta\bar{\lambda})v_{xx}''(1) + qv(1) = 0, \quad v'_x(0) = 0, \quad v(0) = 0 \quad (4.6)$$

Система без трения. При отсутствии трения  $\mu = \eta = 0$  спектр задачи (1.3), (1.4) определяется характеристическим уравнением [2, 36]

$$2\omega^2(1 + \text{ch}(a)\cos(b)) + q(q + ab\text{sh}(a)\sin(b)) = 0 \quad (4.7)$$

где

$$a = \sqrt{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + \omega^2}}, \quad b = \sqrt{q/2 + \sqrt{q^2/4 + \omega^2}}, \quad \omega^2 = -\lambda^2 \quad (4.8)$$

Известно, что упругий стержень устойчив для значений следящей силы из интервала  $0 \leq q < q_0$ , где  $q_0 = 20.05$  [21]. При  $q = q_0$  спектр задачи (4.1), (4.2) – дискретный. Он состоит из пары двукратных СЗ  $\pm i\omega_0$  ( $\omega_0 = 11.02$ ) и простых СЗ  $\pm i\omega_{0,s}$ , ( $s = 1, 2, \dots$ ), причем последовательность простых частот имеет вид

$$\omega_{0,1} = 53.71, \quad \omega_{0,2} = 112.4, \quad \omega_{0,3} = 191.1, \dots, \omega_{0,s \rightarrow \infty} = \pi^2 s^2 + O(s) \quad (4.9)$$

Асимптотика СЗ (4.9) была получена в работе [7].

Двукратному СЗ  $i\omega_0$  соответствует цепочка Келдыша длины 2, состоящая из собственной и присоединенной функций  $u_0, u_1$ , удовлетворяющих уравнениям с граничными условиями (1.5), (1.6), которые следуют из соотношений (1.3), (1.4) при  $\mu = \eta = 0$ . Собственная и присоединенная функции сопряженного СЗ  $-i\omega_0$  удовлетворяют уравнениям и граничным условиям, следующим из (4.5), (4.6)

$$\begin{aligned} v_{0xxxx}'''' + q_0 v_{0xx}'' - \omega_0^2 v_0 = 0, \quad v_0(0) = v_{0x}'(0) = 0, \quad v_{0xx}''(1) + q_0 v_0(1) = \\ = v_{0xxx}'''(1) + q_0 v_{0x}'(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} v_{1xxxx}'''' + q_0 v_{1xx}'' - \omega_0^2 v_1 = 2i\omega_0 v_0, \quad v_1(0) = v_{1x}'(0) = 0, \quad v_{1xx}''(1) + q_0 v_1(1) = \\ = v_{1xxx}'''(1) + q_0 v_{1x}'(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

СФ  $u_0, v_0$  определяются из уравнений (1.5), (4.10) [36, 37]

$$u_0(x) = \text{ch}(ax) - \cos(bx) + F(a\sin(bx) - b\text{sh}(ax)) \quad (4.12)$$

$$v_0(x) = \text{ch}(ax) - \cos(bx) + G(a\sin(bx) - b\text{sh}(ax)) \quad (4.13)$$

где

$$F = \frac{a^2 \text{ch}(a) + b^2 \cos(b)}{ab(a\text{sh}(a) + b\sin(b))}, \quad G = \frac{b^2 \text{ch}(a) + a^2 \cos(b)}{b^3 \text{sh}(a) + a^3 \sin(b)} \quad (4.14)$$

Решение краевой задачи (1.6) дает присоединенную функцию  $u_1$  [32]

$$\begin{aligned} u_1(x) = -2i\omega_0 \frac{a\sin(bx) + b\text{sh}(ax) + F(a^2 \cos(bx) - b^2 \text{ch}(ax))}{2ab(a^2 + b^2)} x - \\ - 2i\omega_0 \frac{A_1 \text{sh}(ax) - B_1 \sin(bx)}{2ab(a^2 + b^2)(a\text{sh}(a) + b\sin(b))^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$A_1 = \frac{q}{a^2}(\sin(b)(b^2 \cos(b) - a^2 \text{ch}(a)) + 2ab\cos(b)\text{sh}(a)) + bC \quad (4.16)$$

$$B_1 = \frac{q}{b^2}(\text{sh}(a)(b^2 \cos(b) - a^2 \text{ch}(a)) - 2ab\text{ch}(a)\sin(b)) + aC$$

Коэффициент  $F$  определен первым равенством (4.14). Из краевой задачи (4.11) найдем присоединенную функцию  $v_1$  [32]

$$v_0(x) = 2i\omega_0 \frac{a \sin(bx) + b \operatorname{sh}(ax) + G(a^2 \cos(bx) - b^2 \operatorname{ch}(ax))}{2ab(a^2 + b^2)} x + 2i\omega_0 \frac{A_2 \operatorname{sh}(ax) - B_2 \sin(bx)}{2ab(a^2 + b^2)(b^3 \operatorname{sh}(a) + a^3 \sin(b))^2} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= q \sin(b)(3a^2 b^2 \operatorname{ch}(a) + a^4 \cos(b)) - 2qab^3 \operatorname{sh}(a) \cos(b) + b(b^2 a^2 C + q^2(a^2 + b^2)) \\ B_2 &= 2qba^3 \sin(b) \operatorname{ch}(a) - q \operatorname{sh}(a)(3a^2 b^2 \cos(b) + b^4 \operatorname{ch}(a)) + a(b^2 a^2 C + q^2(a^2 + b^2)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Коэффициент  $G$  определен вторым равенством (4.14).

Полученные собственные и присоединенные функции, определенные на границе между областями устойчивости и флаттера упругого стержня в точке  $\mu = \eta = 0$ ,  $q = q_0$ , служат для вычисления аппроксимации границы области асимптотической устойчивости стержня при  $\mu \neq 0$ ,  $\eta \neq 0$ .

*Система с трением.* Рассмотрим теперь вязкоупругий стержень, колеблющийся в вязкой среде. Исследуем влияние малого внутреннего ( $\eta \neq 0$ ) и внешнего ( $\mu \neq 0$ ) трения на простые СЗ  $\pm i\omega_{0,s}$  ( $s = 1, 2, \dots$ ). Поведение простых СЗ при изменении параметров описывается формулой (3.17), причем приращение вещественной части возмущенных СЗ  $\pm i\omega_{0,s}$  определяется векторами  $\mathbf{g}_s$ , которые вычисляются по формуле (3.18). Для задачи (1.3), (1.4) эти векторы принимают вид

$$\mathbf{g}_s = \frac{1}{2\omega_{0,s}} \left( \frac{(u_{0,s}^{\text{mm}}, v_{0,s})}{(u_{0,s}, v_{0,s})}, 1 \right) \quad (4.19)$$

Собственные функции  $u_{0,s}$ ,  $v_{0,s}$  простых СЗ  $i\omega_{0,s}$  определены уравнениями (4.12), (4.13). При  $s \rightarrow \infty$  собственные частоты имеют асимптотику (4.9), а для соответствующих собственных функций справедливы следующие асимптотические разложения [7]:

$$v_{0,s} = \sin(s\pi x) + O(s^{-1}), \quad u_{0,s} = \sin(s\pi x) + O(s^{-1}) \quad (4.20)$$

С использованием собственных частот (4.9) и собственных функций (4.12), (4.13), (4.2) по формуле (4.19) найдем векторы  $\mathbf{g}_s$ :

$$\mathbf{g}_1 = (32.44, 0.009), \quad \mathbf{g}_2 = (65.03, 0.004), \quad \mathbf{g}_3 = (104.5, 0.003), \dots \quad (4.21)$$

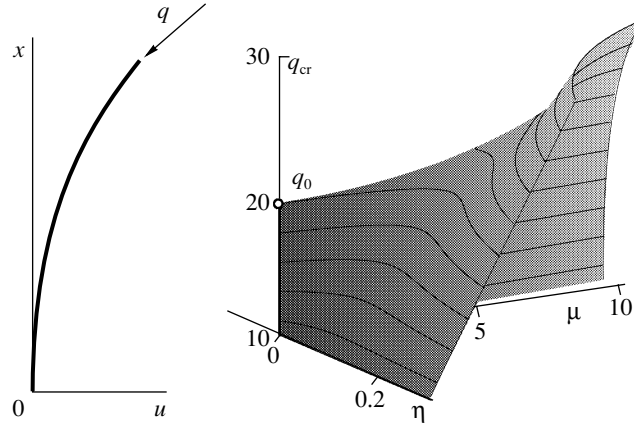
$$\mathbf{g}_s = \frac{1}{2}(s^2 \pi^2 + o(s^2), s^{-2} \pi^{-2} + o(s^{-2})), \quad s \rightarrow \infty \quad (4.22)$$

Согласно условиям (3.19), все простые СЗ смещаются под действием малой диссипации в левую полуплоскость, если все скалярные произведения  $\langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle > 0$  ( $s = 1, 2, \dots$ ), где вектор  $\mathbf{k} = (\eta, \mu)$ . Из соотношений (4.21), (4.22) следует, что этот бесконечный набор неравенств эквивалентен всего лишь двум условиям

$$\eta > 0, \quad \mu > -3807\eta \quad (4.23)$$

отвечающих пределу  $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{g}_s$  и вектору  $\mathbf{g}_1$  соответственно. Отметим, что поведение простых СЗ при учете малого трения и их влияние на устойчивость ранее не анализировалось.

Теперь найдем условия устойчивости, которые получаются из информации о распаде двукратных СЗ  $\pm i\omega_0$ . Прежде всего отметим, что собственные функции дву-



Фиг. 6

кратного СЗ (4.12), (4.13) удовлетворяют условию ортогональности (2.34), которое для задачи (1.3), (1.4) принимает вид

$$(u_0, v_0) = 0 \tag{4.24}$$

Подставляя дифференциальный оператор и матрицы граничных условий, определенные уравнениями (1.3), (4.1), (4.3) и (4.4), в уравнения (3.12)–(3.14) и учитывая условие (4.24), найдем

$$\tilde{f} = \frac{(u''_{0xx}, v_0)}{2i\omega_0(u_1, v_0)}, \quad \mathbf{f}_1 = \left( \frac{(u''''_{0xxxx}, v_0)}{2i\omega_0(u_1, v_0)} \right), \quad \mathbf{h} = - \left( \frac{(u''''_{0xxxx}, \bar{v}_1) + (u''''_{1xxxx}, v_0)}{2\omega_0(u_1, v_0)}, \frac{1}{\omega_0} \right) \tag{4.25}$$

Из последней формулы (4.25) и выражений (3.28), (3.31) следует, что вклад малого внешнего трения с коэффициентом  $\mu$  в приращение вещественной части возмущенного двукратного СЗ равен  $-\mu/2$ . Отметим, что этот результат известен [4, 12].

Подстановка в формулы (4.25) собственных и присоединенных функций (4.12), (4.13) и (4.15), (4.17), подчиненных условиям (3.9) и вычисленных при  $q = q_0$  и  $\omega = \omega_0$ , дает

$$\tilde{f} = -4.730, \quad \mathbf{f} = (94.84, 0), \quad \mathbf{h} = -(14.34, 0.091) \tag{4.26}$$

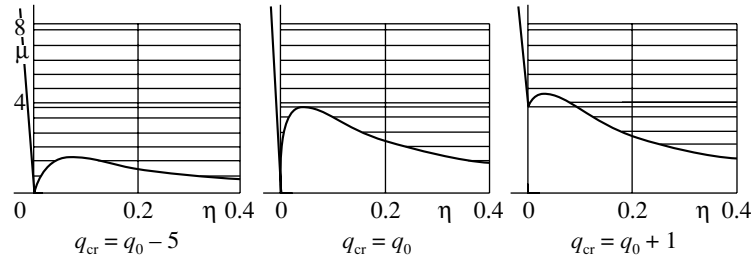
Матрица  $\mathbf{H} \equiv 0$ , поскольку оператор, определенный уравнением (1.3), зависит от параметров линейно. Чтобы вычислить матрицу  $\mathbf{G}$  при помощи уравнения (3.25), необходимо решить краевую задачу (3.26), имеющую здесь вид

$$\hat{w}''''_{2xxxx} + q_0 \hat{w}''_{2xx} - \omega_0^2 \hat{w}_2 = \hat{\mu} u_0, \quad \hat{w}_2(0) = \hat{w}'_2(0) = 0, \quad \hat{w}''_{2xx}(1) = \hat{w}'''_{2xxx}(1) = 0 \tag{4.27}$$

Сравнивая краевые задачи (4.27) и (1.6), найдем, что функция  $\hat{w}_2 = -\hat{\mu} u_1 / (2i\omega_0)$ , (функция  $u_1$  определена уравнением (4.15)). Учитывая это выражение в равенстве (3.25), получим

$$\mathbf{G} = \frac{1}{8\omega_0^2(u_1, v_0)} \left\| \begin{array}{cc} 0 & (u''''_{1xxxx}, v_0) \\ (u''''_{1xxxx}, v_0) & 2(u_1, v_0) \end{array} \right\| \tag{4.28}$$





Фиг. 7

Подстановка собственных и присоединенных функций в выражение (4.28) дает

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 & 0.247 \\ 0.247 & 0.02 \end{vmatrix} \quad (4.29)$$

С использованием величин (4.26), (4.29) по формуле (3.34) найдем аппроксимацию критической нагрузки как функции параметров диссипации

$$q_{cr}(\eta, \mu) = q_0 - \frac{1902\eta^2}{(14.34\eta + 0.091\mu)^2} + 12.68\eta\mu + 0.053\mu^2 \quad (4.30)$$

Необходимое условие устойчивости  $\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0$  принимает при этом вид

$$\mu > -158.0\eta \quad (4.31)$$

Отметим, что аналитическая формула (4.30) для критической нагрузки, учитывающая влияние внешнего и внутреннего трения, получена впервые. Функция критической нагрузки (4.30) при условии (4.31) изображена на фиг. 6.

Объединяя условия устойчивости, полученные в результате изучения поведения простых и двукратных СЗ, найдем, что вязкоупругий стержень в вязкой среде асимптотически устойчив в окрестности точки

$$\eta = 0, \quad \mu = 0, \quad q = q_0$$

при выполнении трех условий

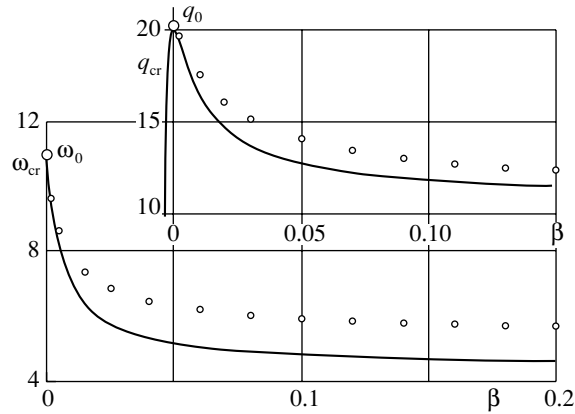
$$q < q_{cr}(\eta, \mu), \quad \eta > 0, \quad \mu > -158.0\eta \quad (4.32)$$

Величина  $q_{cr}(\eta, \mu)$  определена формулой (4.30).

Поскольку оба коэффициента трения предполагались неотрицательными, последние два условия (4.32) удовлетворяются автоматически.

На фиг. 7 на плоскости параметров трения  $\eta, \mu$  показаны сечения области асимптотической устойчивости (4.32) при разных  $q$ .

Из фиг. 6 и 7 видно, что в пространстве трех параметров существует область асимптотической устойчивости с особенностью в точке  $\eta = 0, \mu = 0, q = q_0$ . Эта область сильно вытянута вдоль вертикальной оси, отвечающей коэффициенту внешнего трения  $\mu$ . Кроме того, из анализа линий уровня границы области устойчивости следует существование области изменения параметров трения, в которой  $q_{cr}(\eta, \mu) > q_0$ .



Фиг. 8

Это позволяет сделать вывод об эффекте *стабилизации* вязкоупругого стержня малым внутренним и внешним трением: при любом малом коэффициенте внутреннего трения  $\eta$  существует малое значение коэффициента внешнего трения  $\mu$ , для которых  $q_{cr}(\eta, \mu) > q_0$ , и система с трением асимптотически устойчива. Отметим, что этот эффект не был обнаружен в предшествующих работах по распределенным системам.

Выражения, аппроксимирующие скачок критической нагрузки и частоты, следуют из уравнений (3.38) и (3.44) после подстановки в них величин (4.26)

$$\Delta q = \frac{1902\beta^2}{(14.34\beta^2 + 0.091)^2}, \quad \Delta\omega = \frac{94.84\beta}{14.34\beta + 0.091}, \quad \beta = \frac{\eta}{\mu} \tag{4.33}$$

Зависимости предела критической нагрузки и частоты от отношения коэффициентов внутреннего и внешнего трения  $\beta$ , вычисленные по формулам (4.33) и изображенные на фиг. 8 сплошными линиями, хорошо согласуются с полученными ранее численно [7], которые показаны на фиг. 8 светлыми точками. Отметим, что точность аппроксимаций (4.33) наилучшая в окрестности  $\beta = 0$ . Тем не менее пределы критических нагрузки и частоты при  $\mu = 0$  и  $\eta \rightarrow 0$  равны, соответственно,  $q_{cr} = 10.80$  и  $\omega_{cr} = 4.40$ , что близко к значениям  $q_{cr} = 10.94$  и  $\omega_{cr} = 5.40$ , найденным численно [7].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00161) и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF-BRHE № Y1-MP-06-19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing.-Arch. 1952. Bd. 20. H. 1. S. 49–56.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Herrmann G. Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces // Appl. Mech. Revs. 1967. V. 2. p 2. P. 103–108.
4. Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces // Intern. J. Solid. Struct. 1969. V. 5. № 9. P. 965–989.

5. Ziegler H. Principles of structural stability. Waltham, Mass.: Blaisdell, 1968 = Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
6. Anderson G.L. Application of a variational method to dissipative non-conservative problems of elastic stability // J. Sound Vibrat. 1973. V. 27. № 2. P. 279–296.
7. Андрейчиков И.П., Юдович В.И. Об устойчивости вязкоупругих стержней // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 2. С. 78–87.
8. Денисов Г.Г., Новиков В.В. Об устойчивости стержня, нагруженного “следящей” силой // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 150–154.
9. Lottati L. The role of damping on the stability of short Beck’s columns // AIAA Journal. 1985. V. 23. № 12. P. 1993–1995.
10. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1987. 352 с.
11. Пановко Я.Г., Сорокин С.В. О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 135–139.
12. Сейранян А.П. Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем // Успехи механики. 1990. Т. 13. № 2. С. 89–124.
13. Жинжер Н.И. Влияние диссипативных сил с неполной диссипацией на устойчивость упругих систем // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 149–155.
14. Seyranian A.P., Pedersen P. On two effects in fluid / structure interaction theory // Flow-Induced Vibration. Rotterdam: Balkema, 1995. P. 565–576.
15. Сейранян А.П. О стабилизации неконсервативных систем диссипативными силами и неопределенности критической нагрузки // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 3. С. 323–326.
16. Mailybaev A.A., Seyranian A.P. On singularities of a boundary of the stability domain // SIAM Journal. Matrix Anal. Appl. 1999. V. 21. V. 1. P. 106–128.
17. Langthjem M.A., Sugiyama Y. Dynamic stability of columns subjected to follower loads: a survey // J. Sound and Vibrat. 2000. V. 238. № 5. P. 809–851.
18. Bolotin V.V., Grishko A.A., Panov M.Yu. Effect of damping on the postcritical behavior of autonomous non-conservative systems // Intern. J. Non-Linear Mech. 2002. V. 37. № 7. P. 1163–1179.
19. Kirillov O.N. How do small velocity-dependent forces (de)stabilize a non-conservative system? // DCAMM Report No. 681. Copenhagen: 2003. 40 p.
20. Кириллов О.Н. Парадокс дестабилизации // Докл. РАН. 2004. Т. 395. p 5. С. 614–620.
21. Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes // ZAMP. 1952. V. 3. № 3. S. 225–228.
22. Сейранян А.П. Бифуркации в однопараметрических циркуляционных системах // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 142–148.
23. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. С. 11–14.
24. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. № 4. С. 15–41.
25. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.
26. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
27. Gohberg I.C., Lancaster P., Rodman L. Matrix Polynomials. New York etc.: Acad. Press, 1982. 409 p.
28. Шкалик А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. № 4. С. 92–93.
29. Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991. 368 с.
30. Menckicken R., Möller M. Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems. Amsterdam; London: Elsevier, 2003. 500 p.
31. Кириллов О.Н., Сейранян А.П. Распад цепочек Келдыша и устойчивость неконсервативных систем // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 2. С. 172–176.

32. Kirillov O.N., Seyranian A.P. Collapse of the Keldysh chains and stability of continuous nonconservative systems // SIAM Journal Appl. Math. 2004. V. 64. № 4. P. 1383–1407.
33. Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory. Oxford: Clarendon Press, 1975. 264 p.
34. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.
35. Plaut R. H. Determining the nature of instability in nonconservative problems // AIAA Journal 1972. V. 10. № 7. P. 967–968.
36. Pedersen P. Influence of boundary conditions on the stability of a column under non-conservative load // Intern. J. Solids Struct. 1977. V. 13. № 5. P. 445–455.
37. Pedersen P., Seyranian A.P. Sensitivity analysis for problems of dynamic stability // Intern. J. Solids Struct. 1983. V. 19. № 4. P. 315–335.
38. Bilharz H. Bemerkung zu einem Satze von Hurwitz // ZAMM. 1944. Bd. 24. S. 77–82.
39. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

Москва  
e-mail: kirillov@imec.msu.ru,  
seyran@imec.msu.ru

Поступила в редакцию  
12.V.2004