Stabilité des systèmes non conservatifs et algèbre linéaire

Jean Lerbet[a], Marwa Aldowaji[a], Noël Challamel[b], Oleg Kirillov[c], François Nicot[d], Félix Darve[e]

a. *IBISC , UFRST-UEVE, 40, rue du Pelvoux CE 1455 91020 Evry Courcouronnes cedex, France*

b. *Université Européenne de Bretagne Université de Bretagne Sud LIMATB -UBS -Lorient Centre de Recherche Rue de Saint Maudé - BP 92116 56321 Lorient cedex, France*

c. *Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf, P.O. Box 510119, D-01314 Dresden, Germany*

d. *IRSTEA, ETNA - Geomechanics Group, Domaine universitaire, 38042 Saint Martin d'Heres, France*

e. *Laboratoire Sols Solides Structures, UJF-INPG-CNRS, BP 53 38041 Grenoble cedex 9, France*

Résumé :

L'étude de la stabilité linéaire des systèmes non conservatifs à matrices de rigidité non symétriques met en oeuvre des résultats d'algèbre linéaire peu classiques en mécanique. Elle peut même mener à des développements originaux d'algèbre linéaire. Nous illustrerons ces faits sur des problèmes de stabilité sous ajout de contraintes cinématiques dans un système non conservatif, problème qui mènera au concept original de matrice m-définie positive. Le résultat central sera présenté et quelques problèmes mathématiques ouverts suggérés.

Abstract :

Investigations about linear stability of nonconservative systems with non symmetric stiffness matrices lead to linear algebra results that are unusual in mechanics. It may also lead to original linear algebra developments. It is illustrated about linear divergence stability when adding kinematic constraints on the nonconservative system. The original concept of m-positive definite matrices is proposed, the main result is given and some mathematical open problems are suggested.

Mots clefs : **3 maximum : systèmes non conservatifs ; matrice m-définie positive ; contraintes cinématiques**

1 Introduction

Le travail présenté s'inscrit dans le cadre d'une collaboration nationale puis internationale autour de la problématique de la stabilité des systèmes Σ menant à des matrices (tangentes) de rigidité K qui sont non symétriques. On suppose donc ici que l'on a affaire à un système discret ou discrétisé Σ dont on étudie la dynamique linéaire (vibrations libres) qui dans le cadre général se met sous la forme :

$$M\ddot{X} + D\dot{X} + KX = 0 \tag{1}$$

avec M matrice de masse, D matrice d'amortissement et K matrice de rigidité. Deux cadres standards à ce jour peuvent conduire à une problématique avec K non symétrique :

– les systèmes soumis à des forces ne dérivant pas de potentiels comme les forces suiveuses : la non symétrie de K vient des actions extérieures à Σ
– les milieux plastiques non associés : la non symétrie de K vient des actions intérieures à Σ

Il est assez connu que ces systèmes peuvent mener à des "paradoxes". L'introduction de viscosité dans un modèle n'en contenant pas initialement peut, par exemple, avoir un effet déstabilisant (voir [2], [5]). Il est en revanche moins connu que l'ajout de contraintes cinématiques puisse également avoir un tel effet déstabilisant sur Σ. On sait d'ailleurs depuis Rayleigh que, concernant la stabilité linéaire des systèmes conservatifs, un tel phénomène est impossible. C'est ce dernier "paradoxe" qui est traité dans ce travail.
Par ailleurs, et initialement sans rapport avec la problématique de l'ajout des contraintes cinématiques, le critère dit du travail du second ordre a été proposé par Hill([4]) en 1958 dans le cadre de la mécanique des solides plastiques non associés. Tout à fait indépendamment des travaux de Hill, il a également été proposé en 2004 dans le cadre des actions non conservatives ([1]) en mécanique analytique comme une extension dans le cadre de perturbations généralisées des équilibres, appelées perturbations mixtes. Ce critère exige que la matrice K soit définie positive et ne porte en fait que sur sa partie symétrique K_s. Il s'écrit donc :

$$\forall X \neq 0 \quad {}^tXKX > 0 \tag{2}$$

Ce critère n'est pas directement lié à la stabilité (linéaire) de Σ en ce sens que sa non satisfaction n'induit pas nécessairement l'instabilité au sens de Lyapounov. Il possède cependant les deux vertus suivantes (voir [6], [3] par exemple) :
– pour un accroissement continu du paramètre de chargement, tant que ce critère (2) est satisfait, il y a stabilité au sens de la divergence
– ce critère est lui même stable au sens de l'ajout d'une contrainte cinématique : si (2) est satisfait pour Σ, il en sera de même pour tout système Σ_{co} obtenu par ajout d'une contrainte cinématique. D'après l'item précédent, il en sera donc de même pour la stabilité pour la divergence : le paradoxe initialement énoncé ne peut pas alors survenir.

En réalité, ce critère est encore plus précis. En effet, lorsque (2) cesse d'être valide le cône des vecteurs isotropes de K_s dans $\mathbb{R}^n$ n'est plus réduit à 0. Il a été montré dans ([3]) que le choix d'une contrainte cinématique sur ce cône déstabilisait le système. Ce critère est donc à la fois optimal et constructif pour la problématique initiale dans le cadre d'une seule contrainte cinématique imposée au système Σ. L'objectif de ce travail est de généraliser ce résultat dans le cas d'une famille quelconque de contraintes. Dans la partie 1, on introduit le concept de matrice m-définie positive et on énonce le résultat principal. Dans la section suivante, on développe très succinctement les aspects mathématiques et on suggère quelques problèmes ouverts et quelques voies de recherche. La section 3 est réservée à un exemple d'illustration. L'essentiel de ce texte se trouve sous une forme développée dans ([7]).

2 Matrices m-définies positives

On rappelle que Σ est instable par divergence si l'on peut trouver une solution constante non nulle X pour l'équation (1) ce qui revient à une solution non nulle pour l'équation

$$KX = 0 \tag{3}$$

ce qui est équivalent à $\det(K) = 0$. Cependant, notant p le paramètre (de chargement), supposant que pour $p = 0$ le système est conservatif stable et que p croît, on a $\det(K(0)) > 0$ et on a donc stabilité par divergence du système tant que p est tel que $\det(K(p)) > 0$, l'instabilité par divergence survenant quand p atteint la valeur critique $p_c > 0$ minimale telle que $\det(K(p_c)) = 0$. On notera également p_{so} la plus petite racine positive de $\det(K_s(p)) = 0$. On a donc toujours, d'après les remarques de l'introduction, $p_{so} \leq p_c$, le critère du travail du second ordre (2) pouvant s'écrire ici $\det(K_s(p)) > 0$. En effet, tant que $\det(K_s(p)) > 0$ aucune des valeurs propres de

$K_s(p)$ ne peut s'annuler. Comme elles sont toutes > 0 pour $p = 0$ et que p croît continument, elles restent donc toutes > 0 ce qui est équivalent à (2).
Supposons maintenant qu'une famille de m contraintes $f(q) = (f_1(q), \ldots, f_m(q) = 0_{\mathbb{R}^m}$ indépendantes soient imposées à Σ paramétré localement par $q = (q_1, \ldots, q_n)$. En prenant la matrice jacobienne de cette famille notée $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$, l'équation (3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} K(p)X + A\Lambda & = & 0 \\ {}^tAX & = & 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

avec $\Lambda = {}^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ le multiplicateur de Lagrange associé à la famille de contraintes. Dorénavant nous supposons que le système Σ est stable pour la divergence c'est-à-dire que $K(p)$ est inversible et $\det(K(p)) > 0$. Posons

$$K_A(p) = \begin{pmatrix} K(p) & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} X \\ \Lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi (4) est équivalent à

$$K_A(p)Y = 0 \tag{5}$$

Or :

$$\begin{pmatrix} K(p) & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{-1}(p) & -K^{-1}(p)A \\ 0 & I_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{nn} & 0 \\ {}^tAK^{-1}(p) & -{}^tAK^{-1}(p)A \end{pmatrix}$$

Donc

$$\det(K_A(p)) \det(K^{-1}(p)) = (-1)^p \det({}^tAK^{-1}(p)A)$$

et :

$$\det(K_A(p)) = (-1)^p \det(K(p)) \det({}^tAK^{-1}(p)A) \tag{6}$$

Posons $\tilde{A} = K^{-1}(p)A$. On a alors :

$$\det(K_A(p)) = (-1)^p \det(K(p)) \det({}^t\tilde{A}K(p)\tilde{A}) \tag{7}$$

puisque

$$\begin{array}{rcl} \det({}^tAK^{-1}(p)A) & = & \det({}^tA{}^tK^{-1}(p){}^tK(p)K^{-1}(p)A) \\ & = & \det({}^t\tilde{A}{}^tK(p)\tilde{A}) = \det({}^t({}^t\tilde{A}K(p)\tilde{A})) = \det({}^t\tilde{A}K(p)\tilde{A}) \end{array}$$

On est alors mené à poser la définition suivante :
Definition Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $1 \leq m \leq n$ un entier. K est dite m-définie positive si, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{nm}$ de rang m, alors $\det({}^tAKA) > 0$. Le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices m- définies positives est noté $D_{m,n}$.
Pour $m = 1$, on remarque que 1- définie positive est équivalent à définie positive au sens de (2).
Le principal résultat est le suivant :
Théorème Si K is définie positive alors pour tout $1 \leq m < n$, K is m-définie positive. Autrement dit, $D_{1,n} \subset D_{m,n}$.
La démonstration générale est longue et technique. Pour $m = 2$, elle est plus directe et instructive et elle permet de comprendre la constructibilité du résultat.
Démonstration Soit $A \in \mathcal{M}_{n2}$ de rang 2, $A = (x_1\, x_2)$ avec $x_i \in \mathcal{M}_{n1}$ pour $i = 1, 2$. Nous identifierons à volonté $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

$$\det\left({}^tAKA\right) = \det \begin{pmatrix} {}^tx_1Kx_1 & {}^tx_1Kx_2 \\ {}^tx_2Kx_1 & {}^tx_2Kx_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} {}^tx_1K_sx_1 & {}^tx_1Kx_2 \\ {}^tx_2Kx_1 & {}^tx_2K_sx_2 \end{pmatrix}$$

où $K = K_s + K_a$ avec K_s (resp. K_a) la partie symétrique (resp. antisymétrique) de K.

$$\begin{aligned}
\det\left({}^tAKA\right) &= \left({}^tx_1K_sx_1\right)\left({}^tx_2K_sx_2\right) - \left({}^tx_1Kx_2\right)\left({}^tx_2Kx_1\right) \\
&= \left({}^tx_1K_sx_1\right)\left({}^tx_2K_sx_2\right) - \left({}^tx_1K_sx_2\right)\left({}^tx_2K_sx_1\right) - \left({}^tx_1K_sx_2\right)\left({}^tx_2K_ax_1\right) \\
&\quad - \left({}^tx_1K_ax_2\right)\left({}^tx_2K_sx_1\right) - \left({}^tx_1K_ax_2\right)\left({}^tx_2K_ax_1\right)
\end{aligned}$$

On a ${}^tK_s = K_s$, ${}^tK_a = -K_a$ et donc et les calculs donnent

$$\det\left({}^tAKA\right) = \det\left({}^tAK_sA\right) + \left({}^tx_1K_ax_2\right)^2 \tag{8}$$

Considérant la forme quadratique associée à K_s, elle définit un produit scalaire car K est supposée définie positive. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$\det\left({}^tAK_sA\right) = \left({}^tx_1K_sx_1\right)\left({}^tx_2K_sx_2\right) - \left({}^tx_1K_sx_2\right)\left({}^tx_2K_sx_1\right) > 0$$

où l'inégalité est stricte car A de rang 2 signifie que les vecteurs x_1, x_2 ne sont pas colinéaires.
On en déduit que $\det({}^tAK_sA) = \left({}^tx_1K_sx_1\right)\left({}^tx_2K_sx_2\right) - \left({}^tx_1K_sx_2\right)\left({}^tx_2K_sx_1\right) > 0$ et donc que K is 2-définie positive. **CQFD**
Cette démonstration et plus particulièrement la relation (8) permet en retour de construire une famille de deux contraintes x_1, x_2 déstabilisant Σ. Nous nous en servirons dans l'exemple traité plus loin. La conséquence de ce résultat sur le plan mécanique est que le critère du travail du second ordre protège la structure en terme de stabilité pour la divergence même si la structure est soumise à une famille quelconque de contraintes cinématiques additionelles.

3 Quelques remarques mathématiques

Tout d'abord, il est assez facile de montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse en général. Cela conduit à deux types de problèmes naturels liés au concept de matrice m- définie positive.

- A-t-on en général $D_{m,n} \subset D_{m',n}$ si $m \leq m'$?
- Décrire $D_{m,n} \setminus D_{1,n}$.
- Décrire $D_{m',n} \setminus D_{m,n}$ si la réponse au premier item est positive.

On pourrait par ailleurs imaginer une autre généralisation des matrices définies postives en disant que que $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est m^*-définie positive si pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{nm}$ de rang m, alors ${}^tAKA \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est elle-même définie positive. Les liens entre m^*-définie positive, m-définie positive et définie positive sont intéressants à étudier. Enfin, un aspect dual de la problématique mécanique sous jacente peut se poser. En effet, au lieu de chercher comme ici des contraintes déstabilisant Σ, on peut chercher des contraintes qui le rende conservatif. On peut qualifier ce problème de dual car précisément les systèmes conservatifs ne sont pas déstabilisables par contraintes cinématiques additionelles sauf si ces contraintes changent la configuration où la linéarisation a été effectuée ce qui est un tout autre problème (voir[9] par exemple). Cet aspect conduit alors à un autre problème d'algèbre linéaire résolu via le concept de degré géométrique de non conservativité et un théorème de Cartan (voir [8]).

4 Un exemple

On traite de l'exemple paradigmatique de la colonne de Ziegler Σ à trois degrés de liberté sous force totalement suiveuse (voir figure1). On s'intéresse à la configuration d'équilibre ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$. Le paramètre de chargement adimensionel est $p = \frac{P\ell}{k}$ où k est la raideur élastique des ressorts, ℓ la longueur des barres et P l'intensité de la force suiveuse. La matrice de rigidité de Σ s'écrit

$$K(p) = \begin{pmatrix} 2-p & -1 & p \\ -1 & 2-p & -1+p \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\det(K(p)) = 1$ indépendant de p (ce qui est un paradoxe !) assure le caractère stable au sens de la divergence de Σ. Les racines de $\det(K_s(p)) = 0$ sont $1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$ et donc $p_{so} = 1$. On en déduit

$$K_s(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

puis $\mathrm{Ker}((K_s(1)) = \mathrm{Vec}(x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. La partie antisymétrique de $K(1)$ est $K_a(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et le sous espace $\mathrm{Vec}(K_a(1)(x_1))$ engendré par $K_a(1)(x_1)$ est $\mathrm{Vec}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$dont l'orthogonal est le plan $\mathrm{Vec}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. Suivant la démonstration du théorème, on doit donc choisir x_2 dans ce plan de telle sorte que (x_1, x_2) soit une famille libre. Par exemple, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit maintenant $A = (x_1\ x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve ${}^tAK(1)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc évidemment $\det({}^tAK(1)A) = 0$. Cependant, la matrice A est en fait la matrice $\tilde{A}$ de (7). Pour revenir à la matrice des contraintes cinématiques, on doit donc calculer $K(1)A$ ce qui donne la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui signifie que la colonne de Ziegler Σ contrainte par $\theta_1 - \theta_2 = 0$ et $-\theta_3 = 0$ est instable au sens de la divergence pour $p = 1$ ce qui se vérifie directement.

5 Conclusions

Dans ce travail, nous avons donc défini le nouveau concept de matrice m-définie positive qui généralise celui de matrice définie positive. Un résultat général a été montré concernant ces matrices et les conséquences sur des propriétés de stabilité des systèmes non conservatifs en ont été tirées : le critère du travail du second ordre permet d'assurer la stabilité par divergence du système initial et de tout sous-système obtenu par ajout de contraintes cinématiques sur ce système. Nous espérons avoir ainsi montré qu'il existe encore, même dans le cadre linéaire, des problèmes intéressant les deux communautés. Le problème dual de celui exposé ici menant au concept nouveau de degré géométrique de non conservativité en est un autre exemple. Pour les mathématiciens, des problèmes ouverts sur ces classes de matrices ont été relevés. L'extension au cadre non linéaire du problème dual reste aussi ouvert. Pour les mécaniciens, une problématique analogue mais concernant les instabilités par flottement reste également un problème ouvert.

Références

[1] E.Absi, J. Lerbet 2004 Instability of elastic bodies, *Mec. Res. Com.* **31** 39-44,

[2] V.V. Bolotin 1963 Nonconservative problems of the theory of elastic stability *Pergamon Press*

[3] N. Challamel, F. Nicot, J. Lerbet and F. Darve, 2010 Stability of nonconservative elastic structures under additional kinematic constraints, *Engineering Structures*, **32** 3086-3092, 2010

[4] R. Hill 1958 A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *Jo.Mech.Phy.Sol.*, **6**, 236-249

[5] O.N. Kirillov and F. Verlhust, 2010 Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Withney's umbrella ? *Z. Angew. Math. Mech.*, **90**, 6, 462-488

[6] J. Lerbet, E.Absi and A. Rigolot 2009 About the stability of nonconservative undamped elastic systems : some new elements, *Int. Jo. of Struc. Sta. Dyn.*, **9**, 2, 357-367

[7] J. Lerbet, M. Aldowadj, N. Challamel, F.Nicot, F. Prunier, F. Darve 2012 P-positive definite matrices and stability of nonconservative systems, *Z. Angew. Math. Mech.*, **92**, 5, 409-422

[8] J. Lerbet, M. Aldowadj, N. Challamel, O. Kirillov, F.Nicot, F. Darve 2013 Geometric Degree of Nonconservativity , *MEMOCS.*, accepté pour publication.

[9] T. Tarnai, Paradoxical behaviour of vibrating systems challenging Rayleighs theorem, *21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Warsaw, 2004.

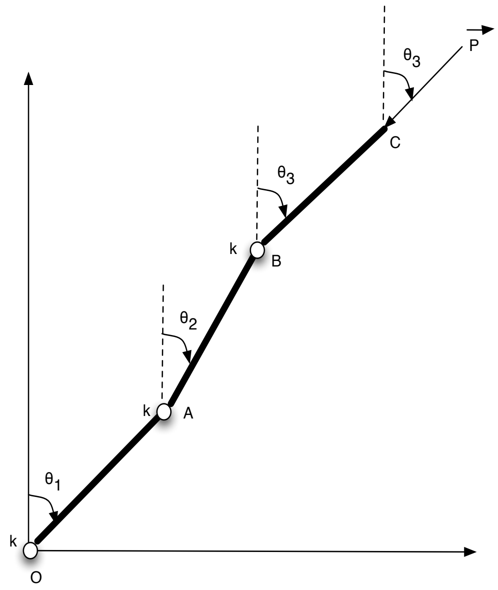

FIGURE 1 – Colonne de Ziegler à trois ddl